

# Tělesa a soustavy těles s vazbami typu NNTP 12př.

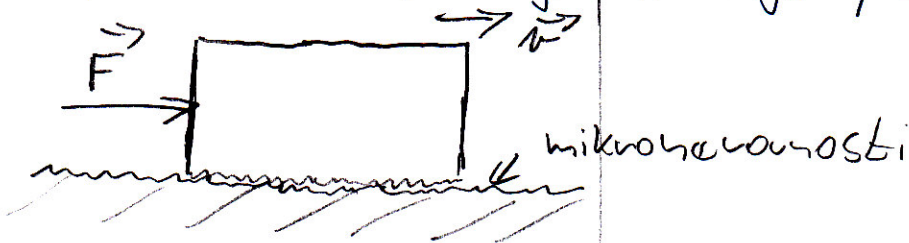
Teorie, definice, zákl. vztahy komentář:

Pozn. 1: Na rozdíl od vazeb NNTP u pasivních vazeb NNTP dochází k energ. ztrátám tlivem tlivem. Projevem těchto ztrát je zahčívání či (mikro) plastická deformace těles.

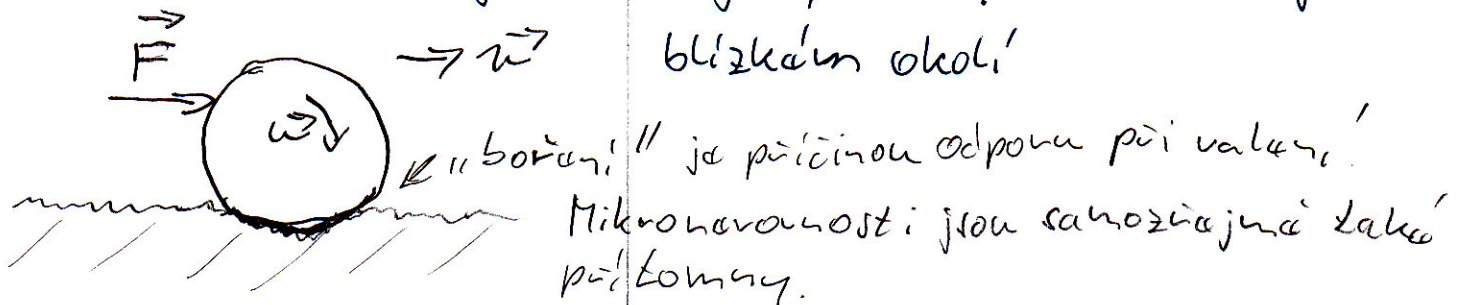
Pozn. 2: Statika není schopna rozlišit děje ve stykovém útvaru  $\Gamma_s$ , naši jen, jak se tyto děje navzájem projevují. Takovému to popisu se říká „fenomenologický popis“. Výpočtovými modely uvážující pasivní vazby se zabývá tribologie.

Pozn. 3: Na velikost pasivních odporů (tliv) má významný (nejvýznamnější) vliv lokální elastická a plastická deformace:

a) Při smýkání se deformují mikroobjemy <sup>materiálu</sup> ve stykovém útvaru:



b) Při valení se deformují makroobjemy ve styk útvaru a jeho blízkém okolí



„boření“ je příčinou odporu při valení.  
Mikronerovnosti jsou samozřejmě také přítomny.

Věta 1: Podstatou odlišování pohybu mezi dvěma tělesy je existence lokální deformace ve stykovém útvaru a jeho okolí, a používání mikrone rovnosti, což se ve vztahu k pohybu těles javí jako odpor proti pohybu!

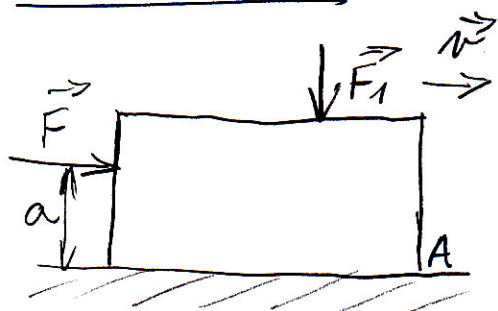
Protože odpor působí vždy proti pohybu, nesmí informace o pohybu nikdy chybět! (vždy je nutné snížit v obr. vyznačit)

Budeme se věnovat 2 nejčastějším výpočtovým modelům:

- Coulombovského (suchého) tření
- Tuhému valení

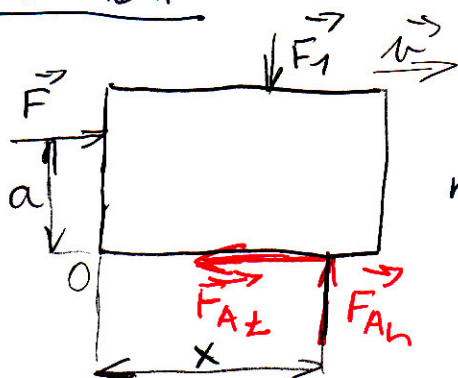
Dále uvedené poznatky vycházejí z rozsáhlých experimentů.

## HRANOL

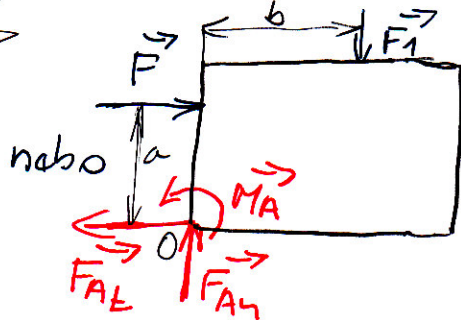


$\vec{F}$  ... hnací síla  
 $F_1$  ... přitlačovací síla (může odpovídat např. hmotnosti tělesa, potom  $F_1 = m \cdot g$ )

volnění:



$F_{An}$  ... normálová síla  
 $F_{Az}$  ... táhací síla



[SR]

$$F_x: F - F_{Az} = 0 \Rightarrow F_{Az} = F$$

$$F_y: F_{An} - F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_{An}$$

$$M_O: -F \cdot a - F_1 \cdot b + F_{An} \cdot x = 0 \Rightarrow \text{hodnota } x$$

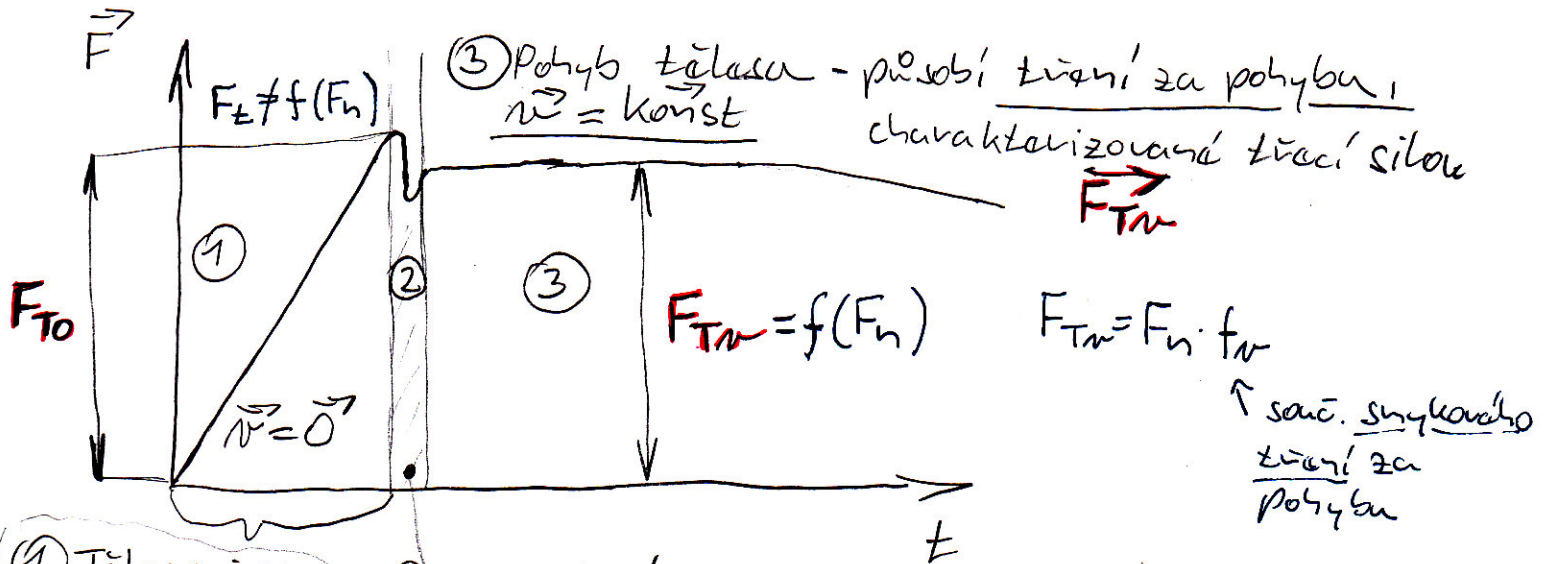
Složka stykové síly  $F_{Az}$  vzniká díky mikrone rovnostem na styk. útvarech

Pozn.:  $F_{Az} = F_{Az} \text{ pro } n=0$   
 $F_{Az} = F_{TO} \text{ pro } n=0+$   
 $F_{Az} = F_{TN} \text{ pro } n=\text{konst}$

} detaily viz další text



Výsledky experimentu pro:  $a = \text{konst}$ ,  $\vec{F}_1 = \text{konst}$ , hnací síla  $\vec{F}$  byla postupně v čase měněna  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  a byla sledována rychlost tělesa  $\vec{v}$ .



- ① Těleso je v klidu! Dochází ke statickému
- ② přechodová (nestabilní) oblast - přechod z klidu do pohybu ( $v = 0_+$ )

tření, charakterizovanému zápornou silou  $\vec{F}_t$  (nejedná se o sílu tření, protože ta je definována jen při pohybu!). Mezní hodnotou je pak statická třecí síla  $F_{T0}$ . Pro oblast ① platí  $F_t < F_{T0}$ .

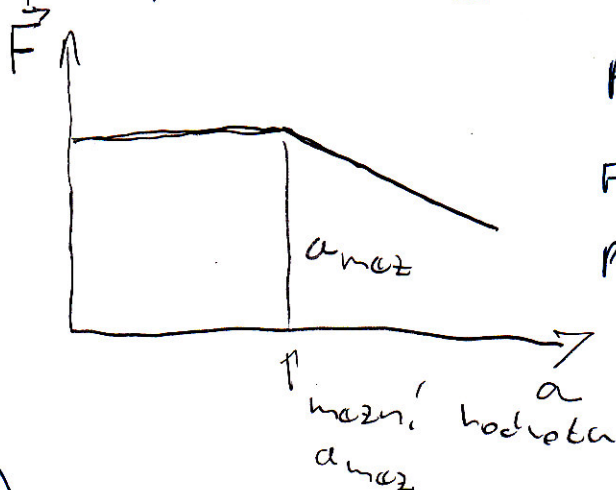
Komentář: Statika zde tedy uvažuje dvě třecí síly. Sílu  $\vec{F}_{T0}$  při přechodu z klidu do pohybu a sílu  $\vec{F}_{Tk}$  při pohybu tělesa při konstantní rychlosti  $\vec{v} = \text{konst}$ , přičemž  $F_{Tk} < F_{T0}$ .

**I.**

- Při  $F = F_t < F_{T0}$  je  $v = 0$  - těleso je v klidu, dosud nebyla překonána hranice klidové stability. Velikosti sil  $F$  a  $F_t$  za klidu jsou na sobě nezávislé a po dosažení do podmínek SR hranolu je zřejmé, že rovněž velikosti normální a tečné složky stykové výslednice na sobě nezávisí, tedy  $F_t \neq g(F_n)$
- Při dosažení  $F = F_{T0}$  byla právě překonána hranice klidu a pohybu - začíná pohyb  $v = 0_+$ . Přechod z klidu do pohybu je nestabilní. V této fázi pohybu existuje přechodová oblast, v níž se velikost hnací síly  $F = F_{T,v}$ , potřebná k udržení dosaženého rovnoměrného pohybu tělesa rychlostí  $v = \text{konst} \neq 0$ , náhle a významně mění.
- Jestliže nastal rovnoměrný makroskopický pohyb  $v = \text{konst}$ , je velikost hnací síly potřebná k jeho udržení menší než pro jeho realizaci  $F = F_{T,v} < F_{T0}$ .

Nyní uvažme  $\vec{F}_1 = \text{konst.}$ ,  $\vec{F} = \text{konst.}$  a měříme polohu nosiče síly  $\vec{F}_1$  tedy vzdálenost  $a$ .

II.



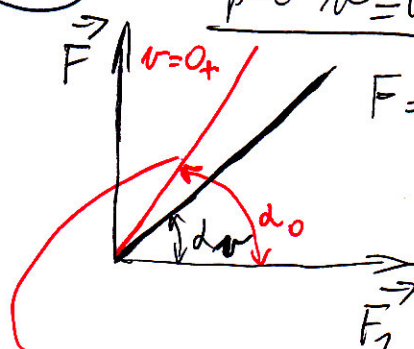
Pro  $a < a_{mez}$  nezávisí vel.  $F_{T0}$  a

$F_{Tv}$  na poloze nosiče  $a$ .

Pro  $a \geq a_{mez}$  dojde k překlopení hranolu. Tento děj není předmětem našeho zájmu

III.

pro  $\vec{v} = \text{konst.} \neq \vec{0}$



$$F = \text{konst.} v \cdot F_1 \rightarrow F_{Tv} = \text{konst.} v \cdot F_n$$

konst. = tg  $\alpha_v$

$$F_{Tv} = f_v \cdot F_n$$

$f_v = \text{souč. smyk. tření}$

pro  $v = 0_+$ :  $F = \text{konst.} 0 \cdot F_1 \rightarrow F_{T0} = \text{konst.} 0 \cdot F_n$  konst. = tg  $\alpha_0$

$$F_{T0} = f_0 \cdot F_n$$

$f_0 = \text{souč. smyk. tření při uvolnění z klidu do pohybu (souč. adheze)}$ .  $f_0$  může být i 1,8x větší než  $f_v$ .

Při výpočtech ve statické budeme využívat následující zjednodušení:

$f = f_0 = f_v$  a tedy:  $F_{T0} = F_T = f \cdot F_n$ .

Zobecnění výsledků experimentů a formulace teorie coulombovského tření:

1. Mezi velikostí hnací síly  $\vec{F}$  a pohybem tělesa platí tyto relace:

- je-li  $F < F_{T0}$  - těleso je v klidu
- je-li  $F = F_{T0}$  - začíná pohyb tělesa (přechodová oblast mezi klidem a pohybem)
- je-li  $F = F_{Tv}$  - rovnoměrný pohyb tělesa  $v = \text{konst}$
- je-li  $F > F_{Tv}$  - nerovnoměrný pohyb tělesa  $v \neq \text{konst}$

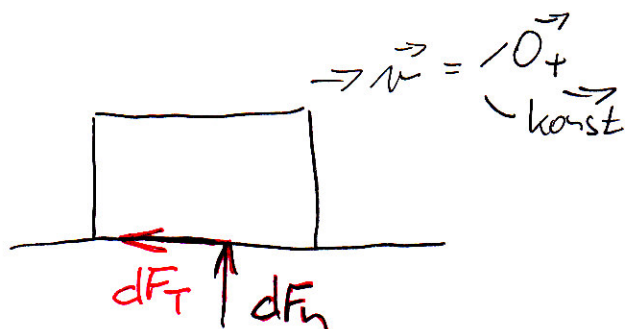
2. Orientace síly  $\vec{F}$  a pohybu tělesa  $\vec{v}$  jsou vždy shodné. Orientace třecí síly  $\vec{F}_T$  a pohybu tělesa  $\vec{v}$  jsou vždy opačné.

3. Práce hnací síly  $\vec{F}$  se mění nevratně na teplo, což se projeví ohřevem okolí styku.

4. Přechod z klidu do pohybu je nestabilní. Jakmile pohyb nastane, velikost hnací síly náhle klesá z počáteční hodnoty  $F = F_{T0}$  a ustavuje se na hodnotě  $F = F_{Tv}$ . Tuto skutečnost známe z praxe, jen si ji ne vždy dostatečně uvědomujeme.



## Definiční vztahy Coulombovského smykového tření!



$$dF_T = f \cdot dF_n$$

$$\vec{F}_T = - \vec{c}_n$$

Z hlediska vymezení Coulombovského tření, třecí síla nezávisí na velikosti třecích ploch.

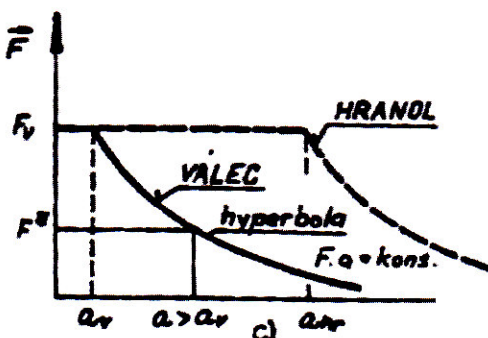
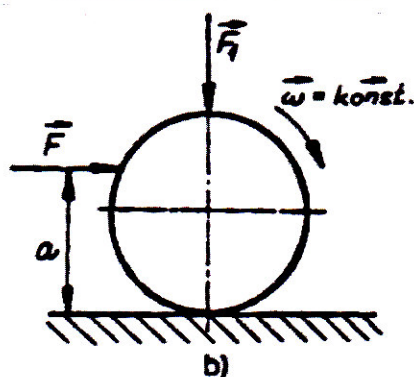
Součinitel smykového tření významně závisí:

- na jakosti povrchu třecích ploch
- na materiálu třecích ploch
- na jakosti mazání
- na teplotě v místě styku

Hodnoty součinitele smykového tření jsou uvedeny v tab.

Materiál těles	$f_0$	$f$
ocel na oceli	0,15	0,03 - 0,09
ocel na litině	0,33	0,13 - 0,17
ocel na fosfátovém bronzu	0,11	0,01
tvrdé dřevo na tvrdé dřevo		
ve směru vláken	0,6	0,5
napříč vláken	0,7	0,6

## VÁLEC



Obr. 136

U válce rozeznáváme 2 druhy pohybu:

(I) smykání  $a < a_v$

$f=1$  Při smykání nesouvisí rotace válce s pohybem vpřed.

Rotace je nezávislá na pohybu válce! (Válec lze prokluzovat, viz např. auto na ledě). Smykání válce viz hranol.

(II) valení  $a \geq a_v$   $f=2$

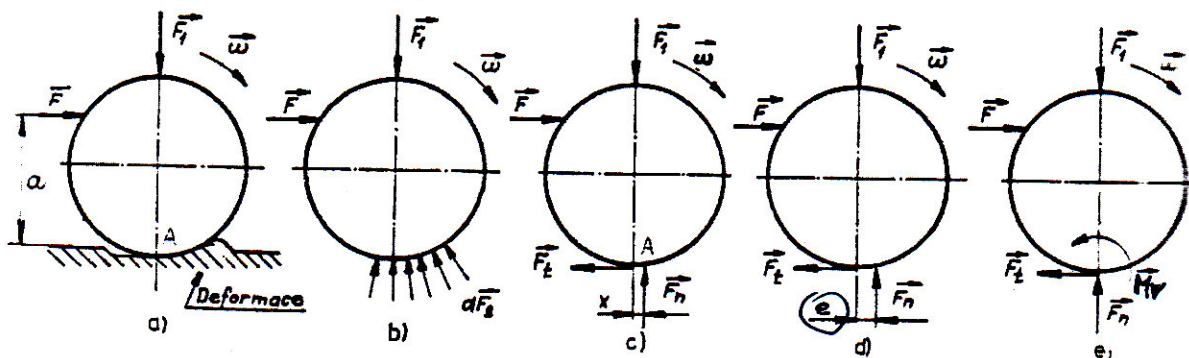
Pro určitou velikost ramene a dojde k valení válce.

Podle velikosti a se tedy válec může smýkat ( $a < a_v$ ) nebo valit ( $a \geq a_v$ ). Valení viz další text.

(11.3)

$$[F^* a = F a = \text{konst'}]$$

Při valení dochází k deformaci těles (válce a desky) v místě styku. Pro názornost naznačíme pouze deformaci desky, obr. 137a. Uvolnění vazby mezi válcem a deskou je znázorněno na obr. 137b a pro výsledné silové působení na obr. 137c.



Podmínky statické rovnováhy: (Obr. 137c)

Obr. 137

$$\begin{aligned} F_x: F - F_t &= 0 \implies F_t = F \\ F_y: -F_1 + F_n &= 0 \implies F_n = F_1 \\ M_{zA}: F_n x - F a &= 0 \implies F_n x = F a \end{aligned}$$

Po dosazení experimentálně zjištěné závislosti  $F a = \text{konst'}$  (viz vztah 11.3) obdržíme

$$F_n x = F a = \text{konst'} \implies x = \frac{\text{konst'}}{F_n} = \frac{\text{konst'}}{F_1} = \text{konst.} = e$$

rameno valivého odporu

Vzdálenost nositelky normální síly od bodu A nazýváme ramenem valivého odporu a značíme ji  $e$ , přičemž  $e = \text{konst.}$  Nositelka normální síly je posunuta vzhledem k bodu A o rameno valivého odporu **proti pohybu tělesa v místě styku**. Uvolnění válce, při uvažování výsledků experimentu je znázorněno na obr. 137d. Na obr. 137e je znázorněno uvolnění válce v případě, kdy působení síly  $\vec{F}_n$  jsme vyjádřili staticky ekvivalentním silovým působením v bodě A ( $\{\vec{F}_n, \vec{M}_v\}$ ).  $\vec{M}_v$  nazýváme momentem valivého odporu, jehož smysl musí být vždy **proti pohybu tělesa v místě styku**.

Velikost ramene valivého odporu závisí na materiálu stýkajících se těles. Orientační hodnoty jsou v následující tabulce.

Materiál těles	$e$ [mm]
litina na litině	0,5
ocel na oceli	0,5
dřevo na kameni	1,5
tvrdé dřevo na tvrdém dřevě	0,5

$$F \cdot a = \text{konst.} \cdot F_1$$

$$F_n = F_1$$

$$M_v = a \cdot F_n$$

$$\vec{M}_v = -a \vec{F}_n$$

Tuhé valení

$M_v$  ... moment valivého odporu

$a$  ... rameno

$F_n$  ... normální síla



Podstatou valivého odporu je deformace těles v místě styku. Jestliže dochází k valení, musíme tělesu dodávat energii, která se v místě styku mění nevratně na teplo a zbytkovou energii napjatosti.

Na závěr zopakujeme tvrzení vyvozená z uvedeného experimentu se zaměřením na válec, protože u hranolu nastává buď smýkání, které jsme popsali v předchozí části nebo dochází k překlápění hranolu, které není předmětem našeho zájmu.

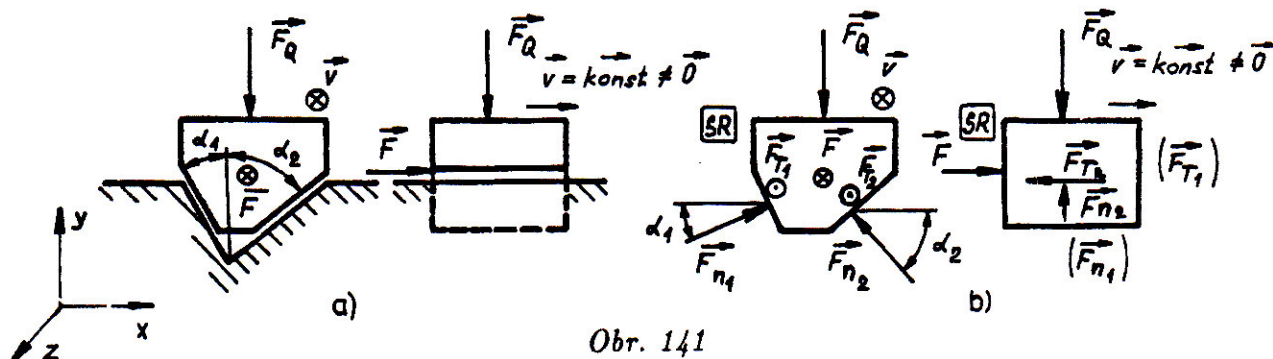
- 1) Mezi působící silou  $\vec{F}$ , parametrem  $a$  a pohybem válce platí tyto relace:  
Je-li  $a < a_v = e$  pak pro  $\vec{F} < \vec{F}_v$  - válec je v klidu  
Je-li  $a < a_v = e$  pak pro  $\vec{F} = \vec{F}_v$  - válec se smýká  
Je-li  $a > a_v = e$  a  $Fa < F_v e$  - válec je v klidu  
Je-li  $a > a_v = e$  a  $Fa = F_v e$  - pak nastává valení tělesa rychlostí  $\vec{\omega} = \text{konst.}$   
Je-li  $Fa > F_v e$  - pak se těleso pohybuje nerovnoměrně
- 2) Moment valivého odporu má vždy opačný smysl než  $\vec{\omega}$  resp. nositelka normální síly je vzhledem k bodu styku v nedeformovaném stavu posunuta o rameno valivého odporu proti pohybu tělesa v místě styku.
- 3) Při valení konstantní úhlovou rychlostí se práce stykové síly mění nevratně v teplo a energii zbytkové napjatosti ve stykovém útvaru.

#### **Závěr:**

Je-li z hlediska řešeného problému podstatné silové působení ve směru geometricky možného pohybu, pak pro styk musíme použít model NNTP a silové působení ve styku významně závisí na charakteru pohybu.

### Těleso v klínové drážce.

Těleso T je vázáno se základním tělesem posuvnou vazbou, přičemž stykovou plochu tvoří klínová drážka (vedení stolů obráběcích strojů atd.) viz obr. 141a. Naším úkolem je odvodit vztah pro velikost síly  $\vec{F}$  na dané nositelce, pohybuje-li se těleso rovnoměrným přímočarým pohybem. Součinitel smykového tření mezi tělesy je  $f = \text{konst.}$  Geometrická konfigurace a zatížení jsou zřejmé z obr. 141a.



Těleso T se pohybuje v klínové drážce konstantní rychlostí  $\vec{v}$ , je tedy ve statické rovnováze. Po uvolnění tělesa viz obr. 141b sestavíme podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru.

$$\begin{aligned} F_x : F_{n1} \cos \alpha_1 - F_{n2} \cos \alpha_2 &= 0 \\ F_y : F_{n1} \sin \alpha_1 + F_{n2} \sin \alpha_2 - F_Q &= 0 \\ F_z : -F + (F_{n1} + F_{n2})f &= 0 \end{aligned}$$

Vhodnými algebraickými úpravami z první a druhé rovnice rovnováhy obdržíme

$$(11.5) \quad F_{n1} = F_Q \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad F_{n2} = F_Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

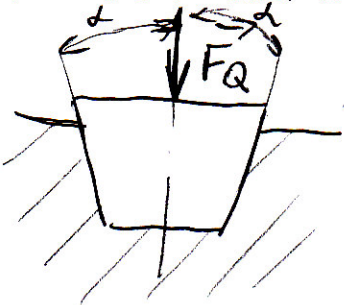
Po dosazení do silové podmínky rovnováhy ve směru osy z dostáváme:

(11.6)

$$F = F_Q f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Tento vztah můžeme formálně upravit na tvar  $F = F_Q f_T$ , kde  $f_T = f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$  se nazývá součinitel tření v klínové drážce.

Pro souměrnou drážku dostaneme:



$$f_1 = f_2 = f$$

$$F = \frac{f}{\sin \alpha} \cdot F_Q = f_T \cdot F_Q$$

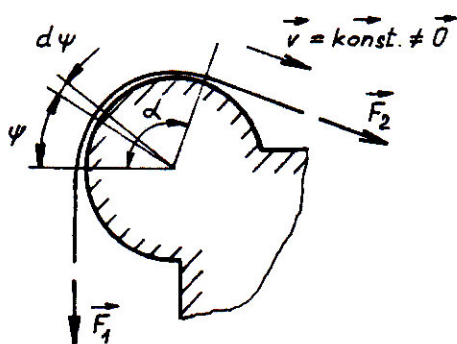
Pro  $\alpha \rightarrow 0$  je  $\sin \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow f_T \rightarrow \infty$

Tato vlastnost se využívá např. u klínů - klínová vřetena apod.

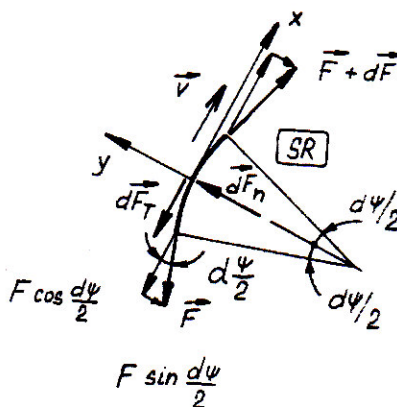


## Vláknové (pásové) tření:

Při pohybu lan, řemenů, ocelových pásů po zakřivených plochách těles dochází ve stykových plochách ke smýkání, které nazýváme pásové nebo vláknové tření (pásové brzdy, smýkání lana po pevné kladce atd.). Vztah pro vláknové tření odvodíme pro dokonale ohebné, neprodužitelné vlákno pohybující se po vypuklé ploše tělesa konstantní rychlostí. Tíha vlákna vzhledem k ostatním silám je nepodstatná. Součinitel smykového tření předpokládáme konstantní. Protože se vlákno pohybuje konstantní rychlostí, je každý element vlákna ve statické rovnováze. Vztah pro vláknové tření odvodíme z podmínek statické rovnováhy uvolněného elementu viz obr. 142b



Obr. 142



$$F_x : (F + dF) \cos \frac{d\psi}{2} - F \cos \frac{d\psi}{2} - dF_T = 0$$

$$F_y : dF_n - (F + dF) \sin \frac{d\psi}{2} - F \sin \frac{d\psi}{2} = 0$$

$$dF_T = f dF_n$$

Po dosazení  $\cos \frac{d\psi}{2} \doteq 1$ ,  $\sin \frac{d\psi}{2} \doteq \frac{d\psi}{2}$ , algebraických úpravách a vyloučení diferenciálních veličin vyšších řádů obdržíme:

$$\left. \begin{aligned} dF - f dF_n &= 0 \\ dF_n - F d\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dF - f F d\psi = 0 \quad \left. \begin{aligned} \frac{dF}{F} &= f d\psi \Big|_1^2 \\ \ln \frac{F_2}{F_1} &= f \alpha \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

$$F_2 = F_1 e^{af}$$

$$F_2 = F_1 \cdot e^{af}$$

... 4 opáčení!  
f... koef. smyk. tření!