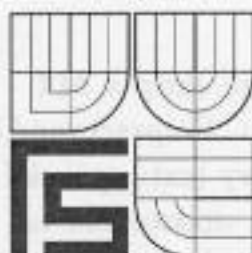


UČEBNÍ TEXTY VYSOKÝCH ŠKOL

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta strojní



Ing. Zdeněk Florian, CSc.,
Prof. Ing. Emanuel Ondráček, CSc.,
Doc. Ing. Karel Přikryl, CSc.

MECHANIKA TĚLES - STATIKA



PC-DIR, spol. s r.o. - Nakladatelství, Brno

Kapitola 1.0

Úvod.

Studium mechaniky těles začíná předmětem statika. Protože se jedná o úvodní předmět mechaniky těles, připomeneme nejdříve některé souvislosti mechaniky těles s předměty, na které navazuje a její začlenění do inženýrského teoretického základu. Na začátku statiky uvedeme také některé základní poznatky z jiných vědních oborů, které studentům pomohou k snadnější orientaci v současných přístupech mechaniky těles a inženýrství vůbec, ale také k snadnějšímu pochopení výkladu v předkládaném skriptu.

1.1 Mechanika těles a fyzika.

Mechanika těles je součástí mechaniky, která patří k nejstarším částem fyziky. I když se studenti setkali s fyzikou na nižších stupních škol a v prvním ročníku na VUT, připomeneme si základní problémy a myšlenky, se kterými se ve fyzice setkáváme.

Každý student ví, že fyzika je přírodní věda. Každá část přírody se vyznačuje velkým množstvím prvků různých vlastností a vztahů mezi nimi. Přirozenou vlastností člověka je snaha nalézt základní prvky, vlastnosti a vztahy mezi nimi a tím pochopit a pokud možno i popsat mnohotvárnost přírody pomocí malého počtu základních prvků a vztahů mezi prvky.



Obr. 1

Názorně si můžeme tuto činnost přiblížit pomocí šachové hry. Člověk, který nezná šachy a ocitne se v roli diváka šachů vidí, že hra je velice rozmanitá (hraje se už několik tisíc let a má lidem stále co říci), ale současně zjišťuje, že šachovnice a figurky jsou stále stejné a také pohyb figurek není nahodilý a figurky se vzájemně ovlivňují. Snahou člověka je poznat základní prvky hry (šachovnici a figurky) a vztahy mezi nimi (pravidla pohybu figurek a vzájemné ovlivňování). Nemuseli jsme použít jako příkladu šachů, ale třeba karetní hry nebo tenisu.

V případě fyziky, ale ne jenom fyziky, je to podobné. Velkou hrou je příroda (okolní svět). Člověk si velice brzy všiml jednotlivých částí vzájemně odlišných různými znaky jako například barvou, velikostí, materiálem, ale také charakterem pohybu. Odtud je už jen krůček k otázkám: Co mají společného různé druhy zvuků? Proč mají předměty různé barvy a kolik je základních barev? Proč se jednou prvek pohybuje rychle, jindy pomalu a někdy se vůči člověku nepohybuje vůbec? Zodpovězením podobných otázek se člověk snaží z rozmanitých projevů přírody analyzovat významné části a vztahy mezi nimi s nadějí, že opakováním tohoto procesu se přiblíží k poznání základních prvků přírody a vztahům mezi nimi.

Hledání odpovědí na dílčí otázky na základě pozorování, usuzování a experimentu nazýváme vědeckou metodou. Všechny tři části vědecké metody mají velký význam, proto se s nimi budeme blíže zabývat.

1.2 Vědecká metoda - pozorování, usuzování, experiment.

Pozorování.

V předchozí části jsme si připomněli, že příroda se skládá ze vzájemně rozlišitelných částí, říkáme, že příroda je strukturovaná. Jednou ze základních schopností člověka je rozlišovat části přírody, přírodu pozorovat. Pozorování je přirozenou činností člověka, při níž člověk vědomě rozlišuje části přírody s cílem získat nové informace. Rozlišovací možnosti člověka jsou dány přirozenými schopnostmi člověka, technickými prostředky a znalostmi, které úroveň rozlišovacích schopností zvyšují. Úroveň rozlišovacích schopností je obsahem pojmu rozlišovací úroveň. V souvislosti s tímto pojmem si musíme uvědomit, že rozlišovací úroveň je vždy omezená úrovní rozvoje vědy a techniky v dané době. Rozlišovací úroveň omezenou současnou úrovní vědy a techniky budeme označovat jako objektivní rozlišovací úroveň. Vedle objektivní rozlišovací úrovně je účelné vymezit absolutní, oborovou, věcnou, individuální a efektivní rozlišovací úroveň.

Absolutní - limitní rozlišovací úroveň, která je prakticky nedosažitelná. Na absolutní rozlišovací úrovni by člověk rozlišoval vše.

Oborová - rozlišovací úroveň charakteristická pro jistý vymezený obor např. strojírenství.

Věcná - rozlišovací úroveň pro určité konkrétní případy daného oboru.

Individuální - rozlišovací úroveň jedince nebo pracovního kolektivu daná jeho schopnostmi a možnostmi.

Efektivní - rozlišovací úroveň, která je nejvhodnější z hlediska řešení problému.

Nerespektování rozlišovací úrovně při řešení úloh nebo problémů je základní chybou se zásadními důsledky. Rozlišovací úroveň musíme respektovat nejen u pozorování, ale také při usuzování a experimentu.

Usuzování.

Usuzování patří do procesů probíhajících ve vědomí člověka. Myslet a usuzovat znamená totéž. Základními prvky myšlení jsou pojmy a soudy. Soud je slovní vyjádření vztahu mezi pojmy, které bezprostředně souvisí s okolím člověka. Úsudek je pochod myšlení, jímž z daných soudů vyvozujeme soudy nové, poznatky. Myšlení probíhá v pojmech a vztazích. Důsledkem použití nevhodného nebo nesprávného pojmu je nesmysl, zmatečný úsudek, což můžeme poznat okamžitě nebo až na základě závažných důsledků, kterými mohou být i havárie. Žádná teorie, tedy ani teorie mechaniky těles, se neobej-

de bez vymezení pojmů. Vzhledem k chybám, kterých se studenti v pojmech dopouštějí a důsledkům z nich plynoucích (nesložení zkoušky), budeme se pojmem v rozsahu nutném pro mechaniku těles zabývat.

Z každodenní praxe víme, že člověk je schopen rozlišovat části okolního světa (věci, zvířata, osoby,.....,prvky) a vztahy mezi nimi. Ze zkušenosti je zřejmé, že celá skupina odlišných věcí může mít ke člověku, případně jiným prvkům, stejný vztah. (Kuchyňský, konferenční, psací, operační - STŮL). U takové skupiny věcí existuje množina vlastností (zpravidla malá), kterou má každý prvek této skupiny a která je významná z hlediska určité funkce. Tuto množinu budeme nazývat množinou podstatných vlastností a nazveme ji, ale také odpovídající skupinu věcí, jménem. Určení skupiny podstatných vlastností a její pojmenování jsme provedli ve vědomí. Vytvořili jsme POJEM.

Pojem je pojmenovaný objekt ve vědomí člověka, který obsahuje podstatné vlastnosti skupiny prvků. Pojem má své jméno, obsah (množinu podstatných vlastností) a rozsah (množina prvků obsahujících podstatné vlastnosti). Vytváření pojmů je přirozenou vlastností člověka. Pojmy vznikají na základě přímého nebo zprostředkovaného odrazu objektivní reality a procesů ve vědomí člověka.

Pojem má složku:

- objektivní - přímý nebo zprostředkovaný odraz objektivní reality.
- subjektivní - je vymezen člověkem.
- společenskou - život člověka je společenský. Člověk sděluje jiným lidem své myšlenky prostřednictvím jazyka. Mají-li být myšlenky jiným lidem srozumitelné, pak jazyk i pojmy musí být společné. U pojmu to znamená, že členové společnosti pod určitým jménem mají ve vědomí i stejný obsah.

Experiment.

Vedle pozorování a usuzování k vědecké metodě patří i experiment. Vymezení pojmu experiment je velmi obtížné, protože název experimentu bývá spojován s různým obsahem. Pojem experiment vymezíme z hlediska vědecké metody.

Čím se experiment výrazně odlišuje od dříve popsanych částí vědecké metody?

Až dosud jsme uvažovali, že předmětem našeho zájmu je část samotné přírody na niž člověk buď vůbec nepůsobil nebo působil jen zprostředkovaně. Cílem člověka je určení základních prvků a vztahů mezi těmito prvky z hlediska určitého děje probíhajícího na vymezené části přírody. Jestliže se snažíme určit základní prvky a vztahy mezi nimi ze samotné přírody je to velmi obtížné, protože vedle sledovaného děje probíhají často i jiné děje a procesy, které z hlediska našeho cíle působí rušivě. Proto člověk daný děj, proces nebude vyšetřovat v přírodních podmínkách, ale podmínky upraví tak, aby děj, který je předmětem jeho zájmu na materiálním objektu probíhal, ale pokud možno neprobíhaly děje jiné, které působí rušivě. Úprava podmínek může být velmi rozsáhlá a často představuje vytvoření nového materiálního objektu.

Tedy *experimentem* nazveme činnost, kterou člověk provádí na materiálním objektu, jenž je upraven nebo vytvořen z hlediska jeho zájmu - poznání základních prvků a vztahů mezi nimi - u vymezeného jevu, děje.

Vedle pojmu experiment se vyskytují pojmy pokus a měření. Pro tyto pojmy můžeme opět uvést to, co bylo na počátku řečeno o experimentu. Obsahem pojmu *pokus* budeme rozumět experiment, který je prováděn na počátku zkoumání jevu, děje, kdy o jeho struktuře toho moc nevíme. Cílem pokusu je získat základní informace umožňující určit nebo upřesnit strategii studia daného jevu, děje.

Měření je činnost při níž se určují kvantitativní údaje.

Měřením bývá pojmenován také experiment, který je charakteristický tím, že strukturu sledovaného jevu, děje známe, nebo je alespoň vytvořená hypotéza a cílem experimentu je získat kvantitativní údaje k potvrzení vytvořené hypotézy nebo k dalšímu studiu.

Pojem *experiment* se tedy používá v širším a užším smyslu, což je schématicky znázorněno v následující tabulce.

EXPERIMENT		
Studium jevu, děje na materiálním objektu za podmínek cílevědomě upravených člověkem z hlediska sledovaného cíle		
POKUS	EXPERIMENT	MĚŘENÍ
Cíl: získat vstupní informace umožňující upřesnit strategii studia jevu, děje.	Cíl: vypracování, upřesnění hypotézy struktury jevu, děje. V technické praxi řešení problému.	Cíl: získat kvantitativní údaje, známe-li alespoň hypotézu děje, jevu.

Tab. 1

1.3 Srovnání předmětu přírodních a technických věd.

Základní vlastností přírody je její strukturovanost a základní schopností člověka je strukturovanost poznávat, určovat a popisovat. *Strukturovaností* rozumíme tu skutečnost, že se příroda skládá z prvků, které jsme schopni rozeznávat stejně tak, jako vztahy mezi prvky, na kterých závisí průběh různých přírodních dějů. Konkrétní děj neprobíhá v komplexu celé přírody, ale omezuje se na určitou část, přičemž průběh daného děje neovlivňují všechny prvky, ale pouze část prvků a vztahů, které jsme nazvali podstatnými prvky a vztahy z hlediska daného děje. Podstatné prvky a vztahy mezi prvky vymezené z hlediska určitého děje tvoří strukturu přírodního děje.

Předmětem přírodní vědy je vymezení, poznání a popis struktury určité skupiny přírodních dějů, jevů na objektivní rozlišovací úrovni. Vedle věd přírodních máme vědy

technické. Předmět a odlišnost předmětu technických věd od předmětu věd přírodních souvisí s posláním techniky. Posláním techniky je příprava, návrh, výroba, provoz a likvidace technických objektů, technických děl. Technické dílo je objekt materiální povahy vytvořený člověkem - skupinou lidí, kterou nazveme pracovním týmem, na základě společenské potřeby technického díla. Je vytvořen v konkrétní době, které odpovídá úroveň poznatků vědy a techniky. Realizace technického díla je z časového a ekonomického hlediska omezená.

Při tvorbě technického díla člověk tvůrčím způsobem využívá poznatků přírodních věd, tedy znalostí struktury přírodních jevů a dějů souvisejících s tvorbou technického díla a poznatků technických věd. Přesto musí pracovní tým zpravidla řešit řadu problémů. Řešení těchto problémů na rozlišovací úrovni odpovídající nalezení a popisu struktury není z ekonomického a časového hlediska možné, proto snahou pracovního týmu je vyřešení problému na rozlišovací úrovni odpovídající tvorbě daného technického díla. Vyřešením problému získá pracovní tým, případně jeho zveřejněním společnost, nový technický poznatek.

Ucelený, uspořádaný a systematizovaný soubor poznatků přírodovědného či technického oboru nazýváme teorií oboru. Teorie přírodovědných oborů je vytvářena na objektivní rozlišovací úrovni. Vytvoření teorie technických oborů odpovídá charakteru řešených problémů daného oboru. U teorie technických oborů musíme vždy uvažovat rozlišovací úroveň, na které byla teorie vytvořena a při řešení problému souvisejících s tvorbou technického díla je nutné využívat teorii rozlišovací úrovně vedoucí k efektivnímu řešení.

1.4 Problémy, řešení problémů, inženýrství.

Pojem problém jsme v předchozím textu již použili bez bližšího vymezení. Přestože o pojmu problém má každý student intuitivní představu, budeme se tímto pojmem blíže zabývat, protože souvisí se situacemi, kdy člověk prokazuje své schopnosti a v případě technických problémů inženýrský přístup.

Jestliže analyzujeme lidské činnosti, pak v řadě případů vzniká situace, kdy po určitém počtu kroků, které jsou typické výkonným charakterem, kdy člověk provádí činnost na základě známého postupu, dochází k situaci, kdy další postup není známý nebo není jednoznačný. Vzniká problémová situace, kterou člověk musí řešit na základě rozhodnutí. K rozhodnutí může člověk přistoupit různě. Můžeme rozlišit tyto přístupy:

Administrativní - zavolá šéfa, ať šéf řekne co dál, šéf vytáhne směrnice a řekne co dál - postupuje podle zpracované směrnice.

Rutinní - člověk rozhodne na základě řešení předchozích obdobných situací.

Tvůrčí - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro efektivní nový přístup.

Seriozní - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro objektivně nejjistější postup.

Odvážný - po zvážení všech dostupných informací vědomě a zodpovědně rozhodne pro postup efektivní, nový, u kterého však není jistota úspěšného ukončení činnosti.

Unáhlený - rozhodnutí není provedeno na základě dostatečného množství dostupných informací.

Neseriozní - řešitel rozhoduje bez informací, vědomě chybně podvodně, atd.

Problém je stav v posloupnosti činností, který člověk musí změnit, protože další činnost - není známá - je nejednoznačná - je známá, ale došlo k porušení podmínek, za kterých je realizovatelná

V celé civilizované historii lze sledovat dva principiálně odlišné přístupy člověka k řešení problémů. Je to způsob řešení problémů přímý a nepřímý. Při přímém řešení se řeší jen formulovaný problém zvoleným postupem. Vede-li postup k cíli, problém se vyřeší. Nevede-li k cíli, začíná se úplně znovu, jinak. Je to přístup, který označujeme pokus - omyl.

U nepřímého řešení, místo formulovaného problému řešíme jiný, snadněji zvládnutelný problém. Prostřednictvím jeho získáme řešení primárně formulovaného problému. Je to řešení oklikou, při němž člověk využívá svých schopností přemýšlet, hodnotit, posuzovat a srovnávat různé varianty s cílem dosáhnout řešení s minimálním úsilím. Ve vědeckotechnické oblasti toto řešení nazýváme modelováním. Má charakter chytrého, prozíravého, efektivního řešení. Není třeba zdůrazňovat, že řešení přístupem pokus - omyl, je v současné technice přijatelný jen u málo významných, jednoduchých a levných technických děl nebo pro řešení dílčího problému s malým počtem možných pokusů. Tímto postupem nelze řešit výstavbu atomových elektráren, vodních děl, dopravních prostředků atd. Zde je třeba v maximální míře využívat modelování. Detailnější popis modelování přesahuje rámec úvodní kapitoly těchto skript. Studenti jej mohou nalézt v [1].

Tvorba, provoz a likvidace technického díla se skládá z celého komplexu činností lidí, které na sebe navazují v časové posloupnosti příprava - návrh - výroba - provoz - likvidace.

Příprava a hlavně návrhová část technického díla se vyznačuje významnými rozhodnutími z hlediska kvality technického díla při celkové informační neurčitosti. Na počátku o novém díle, kromě zadání není známo NIC. Pracovní tým, člověk musí svoji výkonnou, ale především rozhodovací činností technické dílo vytvořit. K rozhodovacím činnostem člověk může přistoupit různě, jak je uvedeno na počátku odstavce. Má-li však nové technické dílo být úspěšné, tj. splnit potřeby společnosti, být konkurence schopné, zaujmout ostatní lidi (společnost), pak musí být vytvořeno tak, aby pravděpodobnost funkce, novosti a realizovatelnosti se blížila jedné, tedy jistotě. Tohoto lze dosáhnout tehdy, jestliže v rozhodovacích činnostech převažují přístupy - seriózní, odvážný, tvůrčí - a výkonné činnosti jsou charakterizované vysokou kvalitou. Tento přístup souhrnně označíme - inženýrským přístupem. Jestliže se nyní podíváme na společné znaky seriózního, odvážného a tvůrčího přístupu zjistíme, že vycházejí ze všech dostupných informací týkajících se daného problému. Součástí dostupných informací je také, a to především, teorie oboru, kterého se daný problém týká.

1.5 Mechanika těles jako předmět na fakultě strojní.

Začlenění mechaniky těles do studia na strojní fakultě souvisí s cílem studia, tj. získání inženýrského vzdělání ve strojním oboru, které umožní studentům po získání praktických zkušeností vytvářet a řídit technická díla. V předchozích odstavcích jsme popsali základní způsoby vytváření technického díla na inženýrské úrovni - modelováním. V celé historii lidstva je řešení významných problémů spojeno s modelováním. Modelový přístup řešení problémů není v určitém časovém období možný bez znalostí odpovídajících úrovni rozvoje vědy a techniky, tedy

- bez přehledu o souboru vědeckých poznatků
- bez vytvoření metody myšlení, která je charakteristická pro daný vědní obor (strojírenství na fakultě strojní)
- bez získání detailního přehledu o souboru znalostí, které jsou využívány v oboru (strojírenství). Významnou součástí tohoto souboru je teorie oboru.
- bez přehledu základních dat oboru

Mezi základní předměty teoretického základu strojírenství patří teorie mechaniky těles, která je dále hierarchicky rozdělena podle následující tabulky.

Úroveň složitosti předmětu	Předměty mechaniky těles v základním studiu na FS
1	statika kinematika
2	dynamika pružnost a pevnost I a II
3	předměty specializací

Tab. 2

Jaký je tedy cíl studia mechaniky těles na strojní fakultě?

Osvojení přehledu a znalostí teorie mechaniky těles spolu s myšlením, které umožní tyto znalosti využívat při řešení problémů strojírenství modelováním.

Jak už bylo uvedeno v předchozích odstavcích, osvojení teorie a myšlení určitého oboru není možné bez vymezení základních pojmů. (Pojem je základním prvkem myšlení.) Teorii oboru - ucelený, uspořádaný, systematizovaný soubor poznatků, který umožňuje logickými operacemi získávat nové informace a poznatky - si člověk lépe osvojí, jestliže zná systém jejího vytváření a uspořádání. Pro získání přehledu si dále uvedeme základní způsoby vytváření teorie. Základními způsoby vytváření teorie jsou dogmatický, axiomatický, hypotetický a postulátový.

Dogmatický: Vychází ze základních vět a operací, které umožňují vytváření vět nových. Základní věty a operace jsou dány AUTORITOU, o které nelze pochybovat.

Axiomatický: Vychází ze základních vět a logicko-matematických operací pomocí nichž vytváří nové věty a tvrzení. Základní věty musí tvořit axiomatický systém.

Věty a tvrzení odvozená z axiomů jsou dokazatelné. (Axiomatickým způsobem jsou vytvářeny teorie oborů matematiky.)

Hypotetický: Vychází z pozorování a studia dějů a jevů. Pravděpodobnostní výklad daného děje nebo jevu nazýváme hypotézou. Po ověření dané hypotézy vědeckými prostředky se hypotéza stává poznatkem. Její formalizované vyjádření nazveme větou. Po získání určitého množství poznatků provádíme jejich utřídění, formalizaci, systematizování a kompletizaci - VYSTAVBU TEORIE. (Tento způsob je charakteristický pro teorie přírodních a technických věd).

Postulátový: Pro postulátový systém platí totéž, co pro hypotetický s tím rozdílem, že hypotéza vychází z objektivní reality, je evidentní, případně demonstrovatelná. Postulát vychází z intuice člověka.

Při vytváření přírodovědných i technických teorií se uplatňuje především hypotetický a postulátový způsob. Axiomatický systém je charakteristický pro vytváření teorií matematických disciplín např. teorie eukleidovské geometrie.

Důležitou úlohu při systematizování poznatků vědeckého oboru má způsob popisu nalezených poznatků. V případě mechaniky těles jediným možným je matematický popis. Vzhledem k tomu, že statika tvoří nejstarší část mechaniky těles, je soubor základních poznatků zcela matematicky formalizovaný a proto teorii statiky můžeme vytvořit axiomatickým způsobem. Axiomy v tomto případě mají charakter základních vět, jejichž pravdivost byla mnohokrát ověřena. Vytvořený axiomatický systém odpovídá strojírenské rozlišovací úrovni. Má-li soubor axiomů splňovat podmínky axiomatického systému, musí být:

Úplný - obsahuje všechny axiomy nutné pro odvození všech vět a tvrzení dané teorie.

Bezrozporný - věty a tvrzení odvozené z tohoto systému nesmí být rozporné.

Nezávislý - žádný z axiomů nelze odvodit ze zbylých axiomů. Tato podmínka je splněna na odpovídající rozlišovací úrovni.

Teorie statiky v tomto skriptu je vytvořena axiomaticky, s možností jejího využití při řešení problémů strojírenství modelováním. Poznatky statiky jsou popsány matematicky a většina úloh a příkladů je řešena výpočtovým nebo grafickým způsobem. Znalost matematiky, odpovídající studiu na střední škole a v prvním ročníku na VUT, je vyžadována. Neznalost matematiky v uvedeném rozsahu má pro studenta závažné důsledky - nesložení zkoušky.

Z dříve uvedených souvislostí je zřejmé, že vytváření žádné teorie se neobejde bez vymezení a upřesnění pojmů. Proto po uvedení axiomů budeme pokračovat základními pojmy.

Kapitola 2.0

Axiomy mechaniky těles se zaměřením na statiku.

1. Axiom o prostoru a čase.

- Prostor je trojrozměrný, spojitý, izotropní, euklidovský, inerciální a absolutní.
- Čas je skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladná rovnoměrně rostoucí veličina, charakterizující současnost a následnost jevů v prostoru.

2. Axiom o hmotnosti.

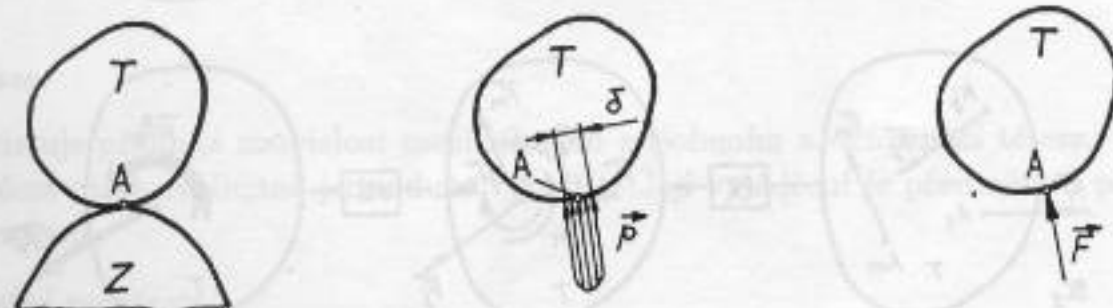
Každému prvku tělesa lze přiřadit hmotnost jako skalární veličinu charakterizující gravitační a setrvačné vlastnosti prvku.

3. Axiom o energii a zachování energie.

Energie je skalární veličina, která vyjadřuje míru změny děje. U uzavřených systémů je energie konstantní.

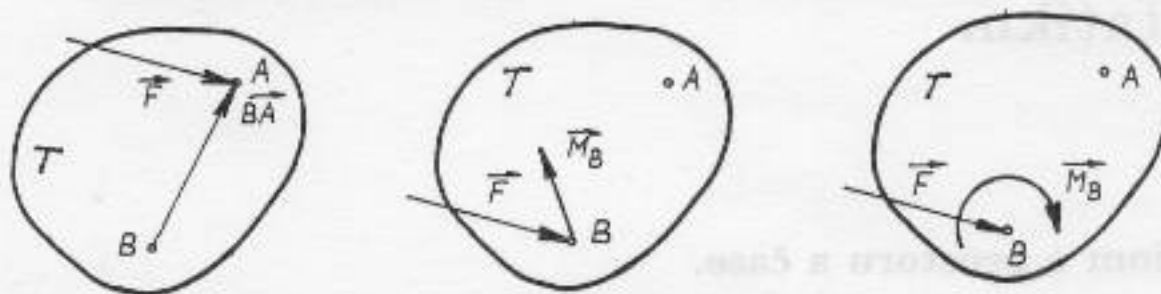
4. Axiom o silovém působení.

- Silové působení v δ okolí bodu A, které je z hlediska silového působení nepodstatné, je vektorová veličina — síla \vec{F} vázaná k bodu A. Síla \vec{F} má vlastnosti vektoru vázaného k bodu.



Obr. 2

- b) Působení síly \vec{F} v bodě A tělesa lze z hlediska pohybové ekvivalence vyjádřit v libovolném bodě B silou \vec{F} a momentem $\vec{M}_B = \vec{BA} \times \vec{F}$.



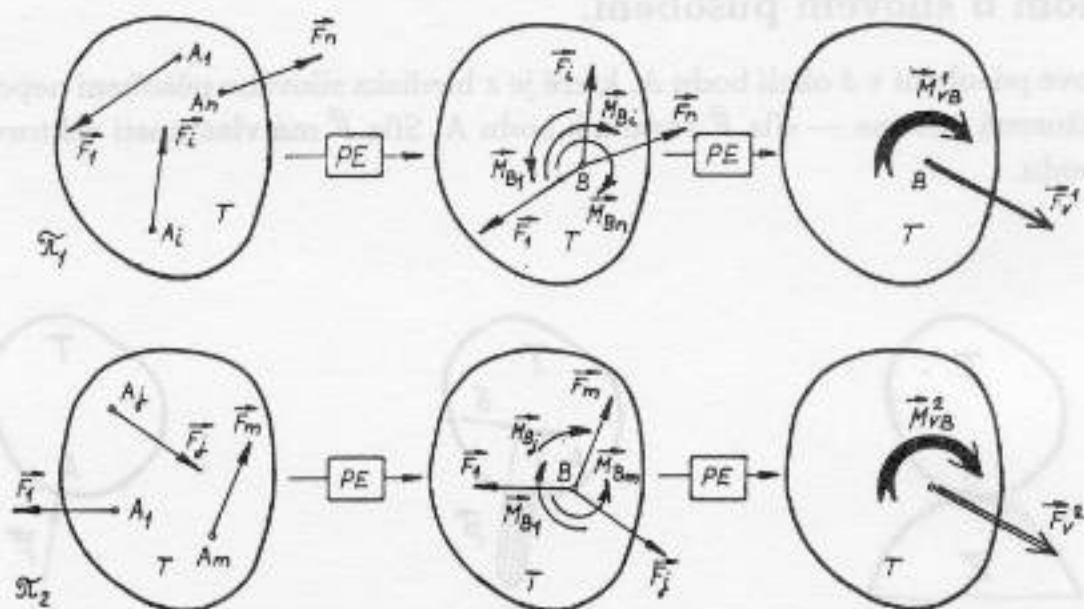
Obr. 3

- c) Působení soustavy sil $\pi_1 = \{A_i, \vec{F}_i\}$ na těleso T je pohybově ekvivalentní s působením soustavy $\pi_2 = \{A_j, \vec{F}_j\}$ jestliže platí:

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_v^1 = \vec{F}_v^2 = \sum_{j=1}^m \vec{F}_j$$

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{B_i} = \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2 = \sum_{j=1}^m \vec{M}_{B_j}$$

viz obr. 4



kde B je bod E_3 .

Obr. 4

5. Axiom o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení na těleso T.

Pohyb tělesa jako celku.

- Těleso zůstává v klidu nebo v rovnoměrném pohybu, pokud není vnějšími okolnostmi nuceno tento stav změnit.
- Příčinná souvislost pohybu tělesa T jako celku a silového působení je vyjádřena vztahy:

$$(2.3) \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

- Existuje-li mezi dvěma tělesy T_1 a T_2 silové působení v δ okolí stykového bodu $A \equiv (A_1, A_2)$, které je z hlediska silového působení nepodstatné a vyjádříme-li silové působení

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \text{ na } T_2 \text{ silou } \vec{F}_{12} \\ T_2 \text{ na } T_1 \text{ silou } \vec{F}_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pak platí } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{v } A \equiv (A_1, A_2)$$



Obr. 5

Deformace.

- Existuje příčinná souvislost mezi silovým působením a deformací tělesa. Tuto souvislost nelze explicitně jednoduše vyjádřit. Její vyjádření je předmětem pružnosti a pevnosti.

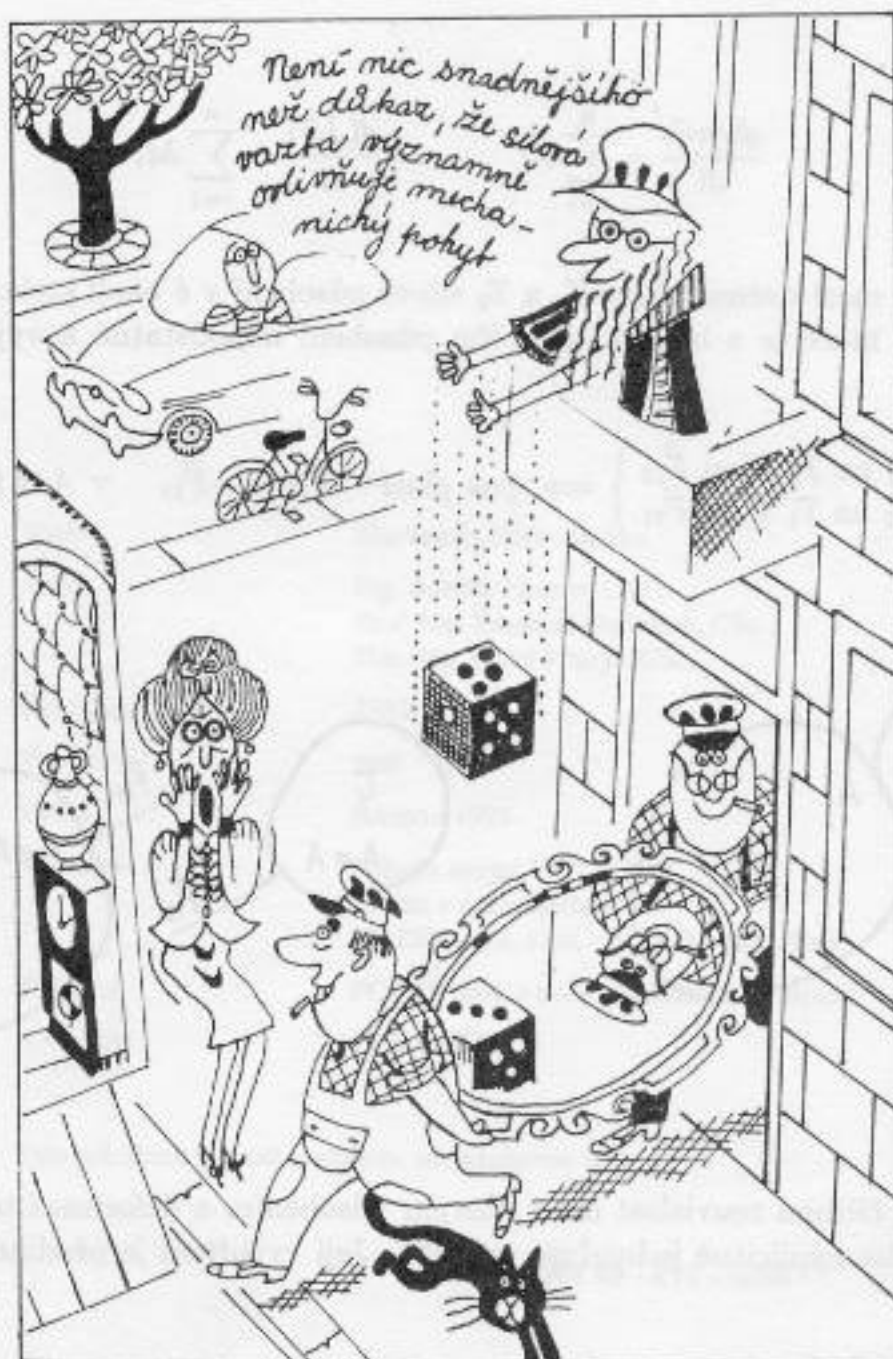
Porušování spojitosti.

- Existuje příčinná souvislost mezi silovým působením a porušováním spojitosti tělesa. Vyšetřování a popis této souvislosti je předmětem pružnosti a pevnosti.

6. Axiom o styku těles.

V bodech styku těles je pohyb

- a) omezen ve směru normály v důsledku neprostupnosti těles
- b) je ovlivněn v tečném směru, míra ovlivnění závisí na podmínkách ve styku
- c) je závislý na dodávání energie do styku, která je nevratná



Obrázek ke kapitole 3

Obr. 6

Kapitola 3.0

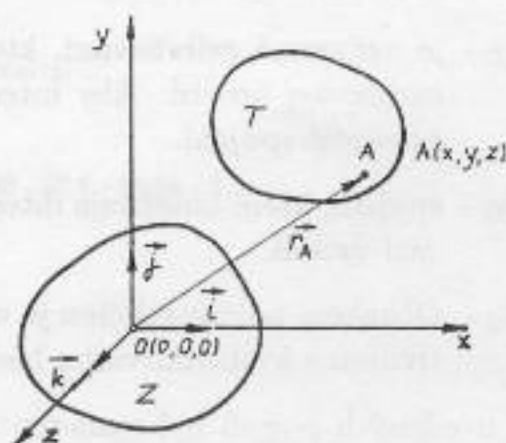
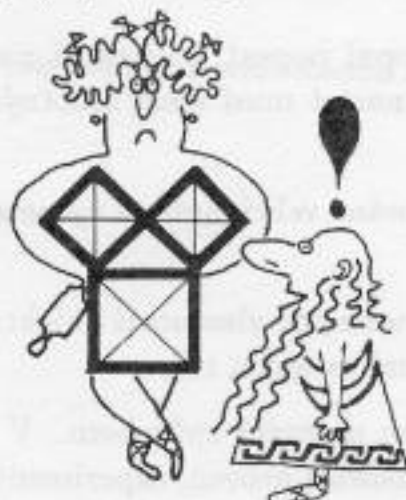
Základní pojmy mechaniky těles se zaměřením na statiku.

Hmota - Základní filosofická kategorie, jejímž obsahem je objektivní realita jako protiklad vědomí člověka. Základními atributy existence hmoty jsou prostor, čas, pohyb. Konkretizací hmoty na strojírenské rozlišovací úrovni je hmotný objekt, který je účelově vymezen zájmem lidí z hlediska řešeného problému.

Prostor - Obsah pojmu prostor je na objektivní rozlišovací úrovni stále předmětem zájmu vědců, kteří se snaží odpovědět na otázky týkající se konečnosti, zakřivení, dimenze atd. Na strojírenské rozlišovací úrovni je obsah pojmu prostor předmětem axiomu **A1a**.

Prostor je trojrozměrný, spojitý, izotropní, eukleidovský a absolutní.

- absolutní - lze vždy vymezit hmotný útvar, který určuje základní těleso, se kterým můžeme spojit základní souřadnicový systém (základním tělesem u strojů je rám nebo základ stroje).
- trojrozměrný - báze prostoru má dimenzi tři. Každý bod prostoru vzhledem k základnímu prostoru (vztažnému prostoru) je jednoznačně určen třemi souřadnicemi. Viz obr. 7b.
- izotropní - vlastnosti hmotného objektu jsou nezávislé na orientaci v prostoru.
- eukleidovský - platí v něm axiomy eukleidovské geometrie (vzdálenost dvou bodů, úhel dvou přímek atd. určíme vztahy eukleidovské geometrie viz obr. 7a).
- inerciální - rovnice popisující mechanický pohyb jsou nezávislé na pohybu základního prostoru.
- spojitý - principiálně lze rozlišit libovolně blízké dva body.



Obr. 7

Čas - Obsah pojmu čas na strojírenské rozlišovací úrovni je vymezen axiomem A1b.

Čas je skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladně, rovnoměrně rostoucí veličina charakterizující současnost a následnost jevů a dějů.

- skalární veličina - je vyjádřena jedinou mírou nezávislou na prostorové orientaci.
- spojitá - principiálně lze rozlišit libovolně blízké časové okamžiky.
- shodná ve všech bodech prostoru - míra času je nezávislá na poloze v prostoru.
- kladně rovnoměrně rostoucí - čas postupuje vždy od minulosti do budoucnosti ve stálém rytmu.
- současnost a následnost dějů - můžeme rozlišit, zda jeden děj předcházela nebo následoval děj druhý.

Pohyb - Obsahem pojmu pohyb na objektivní rozlišovací úrovni jsou časoprostorové změny na objektu. Pohyb z filosofického hlediska se dále hierarchicky dělí, přičemž nejjednodušší formou je mechanický pohyb.

Mechanický pohyb - je nejjednodušší formou pohybu hmoty, při které nedochází ke změně molekulární struktury a nejedná se o pohyb biologický ani společenský.

Mechanický klid - je pohybový stav, charakterizovaný změnou vzdálenosti tělesa k základnímu tělesu podle vztahu $l = v \cdot t + l_0$, přičemž $v = \text{konst.}$ a nenastává rotace - rovnoměrný přímočarý pohyb nebo těleso pouze rotuje kolem pevné osy souměrnosti konstantní úhlovou rychlostí.

Mechanický jev - je každý jev v objektivní realitě, který je možné vyjádřit mechanickým pohybem, tedy časovou změnou vzdáleností - mezi hmotnými objekty - na hmotných objektech - změnou příslušnosti k hmotnému útvaru.

Subjekt - Člověk - Člověk, který má vědomí s vůlí.

Objekt - Obsahem pojmu objekt je vše, co je předmětem zájmu subjektu - člověka.

Těleso - je reálný objekt, u kterého je hmota ve formě látky v tuhém skupenství s možností deformace.

Interakce - je vzájemné ovlivňování, které jsme schopni popsat veličinami na vymezené rozlišovací úrovni. Aby interakce mohla nastat musí mezi hmotnými objekty existovat spojení.

Vazba - spojení, které umožňuje interakci a je popsáno veličinami na vymezené rozlišovací úrovni.

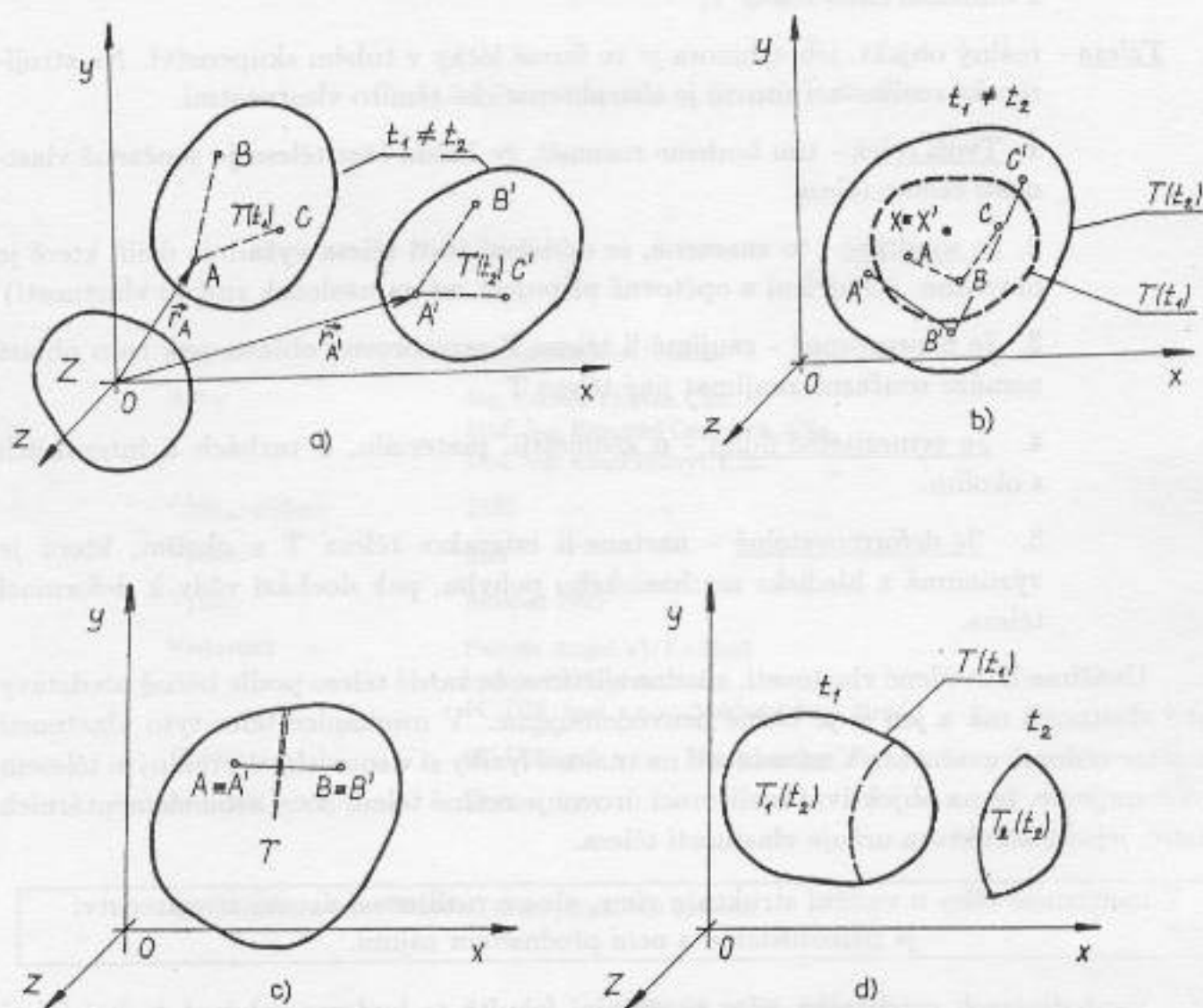
Velčina - Obsahem pojmu veličina je vyjádření vymezených vlastností objektu z kvalitativního a kvantitativního hlediska ve formalizovaném tvaru.

Obsah uvedených pojmů byl vymezen nejstručnějším možným způsobem. V kapitole 1. jsme vymezili řadu důležitých pojmů jako např. rozlišovací úroveň, experiment, technické dílo atd. Názvy těchto pojmů jsou vtištěné kurzívou a podtržené. Vymezení těchto

pojmu nebudeme opakovat. Detailnější popis přesahuje rámec těchto skript a není nezbytně nutný na počátku studia mechaniky, je však uveden v [1]. Seznámení s ním je vhodné pro pochopení širších souvislostí mechaniky a dalších oborů.

3.1 Konkretizace obecných pojmů z hlediska mechaniky těles a pojmy mechaniky těles.

Mechanický pohyb - nejjednodušší forma pohybu. Z hlediska mechaniky těles se dělí na tyto složky - pohyb tělesa jako celku, deformace, porušení spojitosti, oddělování části tělesa. Viz obr. 8 a-d.



Obr. 8

a) složkou pohybu tělesa jako celku rozumíme část mechanického pohybu, při které se mění vzdálenost bodů tělesa vzhledem k souřadnicovému systému

spojenému se základním tělesem, ale nemění se vzdálenost libovolných dvou bodů a úhel libovolných tří bodů tělesa.

b) Deformací rozumíme složku mechanického pohybu, která je charakteristická změnou vzdálenosti libovolných dvou bodů, resp. změnou úhlu libovolných tří bodů tělesa, při neuvažování pohybu tělesa jako celku.

c) Ke změně spojitosti tělesa došlo, jestliže existují dva body A, B tělesa T takové, že v čase t_1 jsou všechny body spojnice \overline{AB} prvky tělesa T a v čase t_2 existuje bod spojnice $\overline{A'B'}$, který není prvkem T , přičemž na dané rozlišovací úrovni je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

d) Ke změně příslušnosti k tělesu dochází, jestliže v časovém intervalu došlo k oddělení části tělesa T .

Těleso - reálný objekt, jehož hmota je ve formě látky v tuhém skupenství. Na strojírenské rozlišovací úrovni je charakteristické těmito vlastnostmi.

1. Tvoří celek - tím budeme rozumět, že každá část tělesa je současně vlastností celého tělesa.

2. Je soudržné - to znamená, že oddělení části tělesa vyžaduje úsilí, které je nevratné. (Oddělení a opětovné připojení má za následek změnu vlastností)

3. Je neprostupné - zaujímá-li těleso T prostorovou oblast, pak tuto oblast nemůže současně zaujímat jiné těleso T .

4. Je vymežitelné údaji - o geometrii, materiálu, o vazbách a interakcích s okolím.

5. Je deformovatelné - nastane-li interakce tělesa T s okolím, která je významná z hlediska mechanického pohybu, pak dochází vždy k deformaci tělesa.

Uvážíme-li uvedené vlastnosti, snadno zjistíme, že každé těleso podle běžné představy tyto vlastnosti má a jen si je běžně neuvědomujeme. V mechanice těles tyto vlastnosti musíme vědomě uvažovat. V návaznosti na znalosti fyziky si v souvislosti s reálným tělesem uvědomujeme, že na objektivní rozlišovací úrovni je reálné těleso soustavou elementárních částic, jejichž struktura určuje vlastnosti tělesa.

V mechanice těles o vnitřní struktuře víme, ale na rozlišovací úrovni strojírenství je nerozlišitelná a není předmětem zájmu.

V předmětech mechaniky těles na strojírenské fakultě se budeme zabývat technickými tělesy. Jsou to tělesa, která mají charakter prvků technických děl, což znamená, že jsou pro lidi potřebná, jsou předmětem jejich zájmu, lidmi cílevědomě vytvořená, vyrobitelná a funkční. Z technických těles se zaměříme na tělesa typická pro strojírenství (např. spalovací motor, převodovka, válcovací stolice - soustavy těles, hřídel, spojka, ozubené kolo - tělesa). Pokud ve výkladu nehrozí nebezpečí chybného vysvětlení budeme přívlastky "technické" a "strojírenské" v názvu technické těleso a strojírenské těleso vynechávat. Reálnému tělesu z hlediska zájmu přiřadíme těleso abstraktní.

Abstraktní těleso - je abstraktní objekt - spojitá, neprostupná ohraničená oblast prostoru E_3 , jejímuž každému bodu jsou přiřazeny charakteristiky silového působení polí a povrchovým bodům jsou přiřazeny charakteristiky styku.

Ve strojírenství se běžně vyskytuje pole gravitačních a pole setrvačných sil. Pak jedinou materiálovou charakteristikou je jeho hustota. Hodnoty hustoty základních strojírenských materiálů jsou uvedeny v tabulce. Jejich znalost se vyžaduje.

materiál	kgm^{-3}
ocel	$7,85 \cdot 10^3$
litina	$7,30 \cdot 10^3$
hliník	$2,70 \cdot 10^3$
měď	$8,90 \cdot 10^3$
zinek	$7,10 \cdot 10^3$
olovo	$11,30 \cdot 10^3$

Tab. 3

Obdobně jako u pojmu *technické těleso*, pokud nehrozí nebezpečí chybného výkladu přívlastky *reálné* a *abstraktní* těleso budeme vynechávat.

Tuhé těleso - Každé reálné těleso je deformovatelné. Obsahem pojmu tuhé těleso je těleso, jehož **deformace** z hlediska řešeného problému je **nepodstatná**. V případě teorie se jedná o věty a tvrzení odvozená za předpokladu nepodstatné deformace.

Dokonale tuhé těleso - Přívlastek "dokonale" u tuhého tělesa nemá smysl, proto pojem dokonale tuhé těleso **nebudeme používat**.

POZOR!!! Výrok: "Tuhé těleso je těleso, které se nedeformuje", je nepravdivý a svědčí o nepochopení pojmu tuhé těleso nebo o nedostatečném osvojení obsahu pojmu tuhé těleso studentem, což je nepřipustné.

Prvek tělesa - je každá oddělitelná část tělesa, která má vlastnosti 1-5 tělesa.

Soustava těles - je soubor těles, vázaných vazbami, které jsou významné z hlediska mechanického pohybu a tvoří celek.

3.2 Interakce a vazba.

Vymezíme-li v objektivní realitě dva hmotné objekty H_1 , H_2 a sledujeme-li jejich vzájemné vztahy, můžeme zjistit, že na dané rozlišovací úrovni se tyto objekty

- vzájemně ovlivňují - jsou vzájemně vázané
- vzájemně se neovlivňují - jsou volné

Míru vzájemného ovlivňování můžeme vyjádřit slovně; malé - velké, významné - nevýznamné, slabé - silné, s malým dosahem - s velkým dosahem atd. Z hlediska úrovně vědy a techniky je toto vyjádření nedostatečné a snažíme se je nahradit vyjádřením

veličinami. Pak hovoříme o interakci hmotných objektů.

Interakce je vzájemné ovlivňování objektů, které je vymezeno veličinami.

Interakce mezi objekty může nastat, jestliže mezi objekty existuje spojení. Spojení, které je vymezeno veličinami nazveme vazbou. Jestliže ve vazbě dochází k interakci mezi hmotnými objekty, pak dochází k přenosu látky, energie a informace.

Vazba je spojení hmotných objektů, které umožňuje jejich interakci a je vymezeno veličinami.

Existence vazby mezi hmotnými objekty H_1 a H_2 neznamená, že interakce právě probíhá, je však nutnou podmínkou možné interakce. Podle toho zda nastává či nenastává interakce prostřednictvím vazby, budeme v mechanice těles rozlišovat vazby:

- funkční - vazba existuje a interakce v daném okamžiku probíhá
- nefunkční - vazba existuje, interakce je možná, ale v daném okamžiku neprobíhá.

POZOR!!! Pro nefunkční vazbu **nebudeme** používat název **pasivní**, který označuje jinou vlastnost vazby.

Interakce hmotných objektů mohou mít nejrůznější charakter stejně jako vazby, které interakce umožňují. V mechanice těles se zabýváme pouze mechanickými vazbami a interakcemi, prostřednictvím nichž dochází k mechanickému pohybu.

3.3 Interakce, silové působení, síla.

V předchozím odstavci jsme vymezili pojem interakce na úrovni vědy a techniky. Interakci, která je významná z hlediska mechanického pohybu nazýváme silovou interakcí. Silovou interakci, která nastává mezi tělesy označíme v mechanice těles názvem silové působení. Základní vlastností tělesa je jeho deformovatelnost, nastane-li mezi tělesy silové působení, pak dochází k přenosu energie ve stykovém útvaru, který je z geometrického hlediska prostorovým nebo plošným útwarem. Pokud velikost tohoto útvaru je nepodstatná z hlediska silového působení a řešeného problému, pak silové působení nazveme SILOU. Viz axiom A4a a obr. 9.

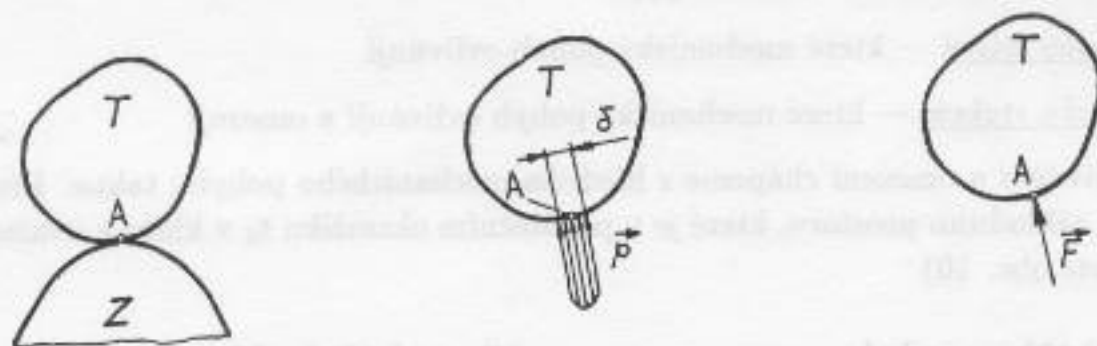
Silové působení v nepodstatném δ okolí bodu A tělesa je vektorová veličina — síla \vec{F} vázaná k bodu A.

Silové působení je vázáno na plošnou oblast, síla na bod této oblasti. Otázkou zůstává, který bod vybrat? Silové působení můžeme vyjádřit silou, pouze v případě, že styková oblast je nepodstatná. Pak je také nepodstatné, který bod oblasti zvolíme.

Z předchozího vyplývá, že silové působení, síla vyjadřuje interakci hmotných objektů, která je podstatná z hlediska mechanického pohybu. Mechanický pohyb hmotných objektů je významně ovlivněn mechanickými vazbami. Odtud plyne, že silové působení závisí na počtu a charakteru vazeb, kterými je objekt vázán k jiným reálným objektům. Vzhledem k tomu, že předmětem našeho zájmu je těleso a na počátku studia mechaniky

těles, těleso spojité, budeme se dále zabývat uložením tělesa z hlediska pohybu tělesa jako celku, deformace a silového působení na těleso.

Uložením tělesa rozumíme soustavu stykových vazeb, kterými je těleso vázáno.



Obr. 9

3.4 Těleso volné, vázané a uvolněné.

Každé reálné těleso je vázáno ke svému okolí různými typy vazeb. Dále se omezíme pouze na vazby, které významně ovlivňují pohyb tělesa jako celku a deformaci. Jsou to všechny vazby, které zprostředkují silovou interakci, jejíž mírou je silové působení na těleso.

Pro tyto vazby, které nazýváme mechanické, platí:

Každé mechanické vazbě, která podstatně ovlivňuje pohyb tělesa jako celku a deformaci, lze přiřadit silovou soustavu, která je vyjádřením a mírou změny mechanického pohybu, způsobené touto vazbou.

V souladu se skutečností, můžeme konstatovat, že mechanické vazby ovlivňují pohyb tělesa jako celku a deformaci, přičemž toto ovlivnění může být podstatné nebo nepodstatné z hlediska řešeného problému.

Rozlišení mechanických vazeb a jim odpovídajících silových soustav na podstatné a nepodstatné je NEJVÝZNAMNĚJŠÍ etapou řešení problémů modelováním.

V dalším výkladu budeme předpokládat, že vazby z hlediska řešeného problému a přípravy na řešení problémů praxe jsou podstatné. Jestliže se zamyslíme nad uvedenými souvislostmi a každodenní praxí, pak zjistíme, že v běžném životě nebývá zvykem uvažovat mechanickou vazbu a silové působení ve vzájemné souvislosti. Zpravidla uvažujeme pouze jednu stránku tohoto vztahu (silně vytištěná).

gravitační síla \longleftrightarrow gravitační vazba viz obr. 6 str. 14

elektromagnetická síla \longleftrightarrow elektromagnetická vazba

setrvačná síla \longleftrightarrow vazba, která se projevuje setrvačnými účinky - setrvačná vazba

styková síla \longleftrightarrow styková vazba

Za povšimnutí stojí, že účinky gravitační, elektromagnetické a setrvačné vazby vyjadřujeme silovým působením, ale stykovou vazbu hodnotíme z důsledků styku. Z uvedeného je zřejmé, že vazby stykem mají z hlediska mechanického pohybu zvláštní vlastnosti, které jsou dány ostře vymezeným povrchem a neprostupností těles. Proto mechanické vazby dělíme na dva základní typy:

- vazby silové — které mechanický pohyb ovlivňují
- vazby stykem — které mechanický pohyb ovlivňují a omezují

Ovlivnění a omezení chápeme z hlediska mechanického pohybu takto: Představme si těleso v základním prostoru, které je v počátečním okamžiku t_0 v klidu a uvažujme tyto případy (viz obr. 10)

a) **těleso volné**
(vazby jsou nerozlišitelné)

- těleso zůstává v klidu

b) **těleso v gravitačním poli zemském** (směr \vec{g} je totožný s osou y) viz obr. 10b

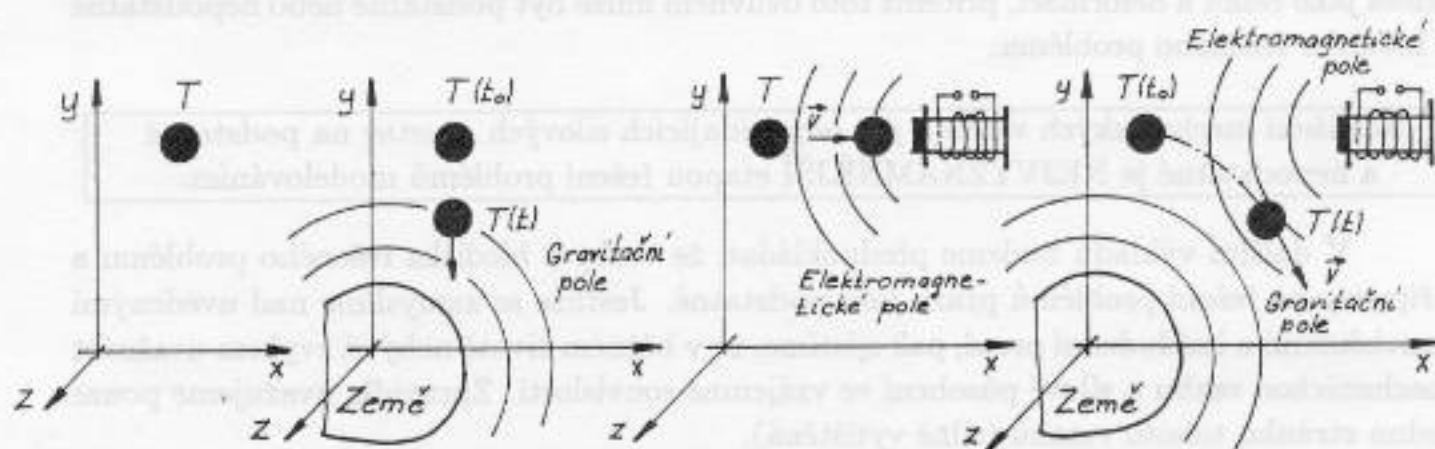
- těleso se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem ve směru osy y .

c) **těleso je v elektromagnetickém poli** podle obr. 10c

- těleso se pohybuje ve směru osy x , charakter pohybu závisí na charakteru elektromagnetického pole.

d) **těleso v gravitačním a elektromagnetickém poli** viz obr. 10d

- výsledný pohyb tělesa je určen složením pohybů c) a d).



Obr. 10

Je-li těleso vázáno silovými vazbami, pak mechanický pohyb tělesa je možný, ale závislý na charakteru silových vazeb - pohyb je ovlivněn.

e) těleso je ve styku se základním tělesem, které se nepohybuje viz obr. 11a

- těleso je v klidu

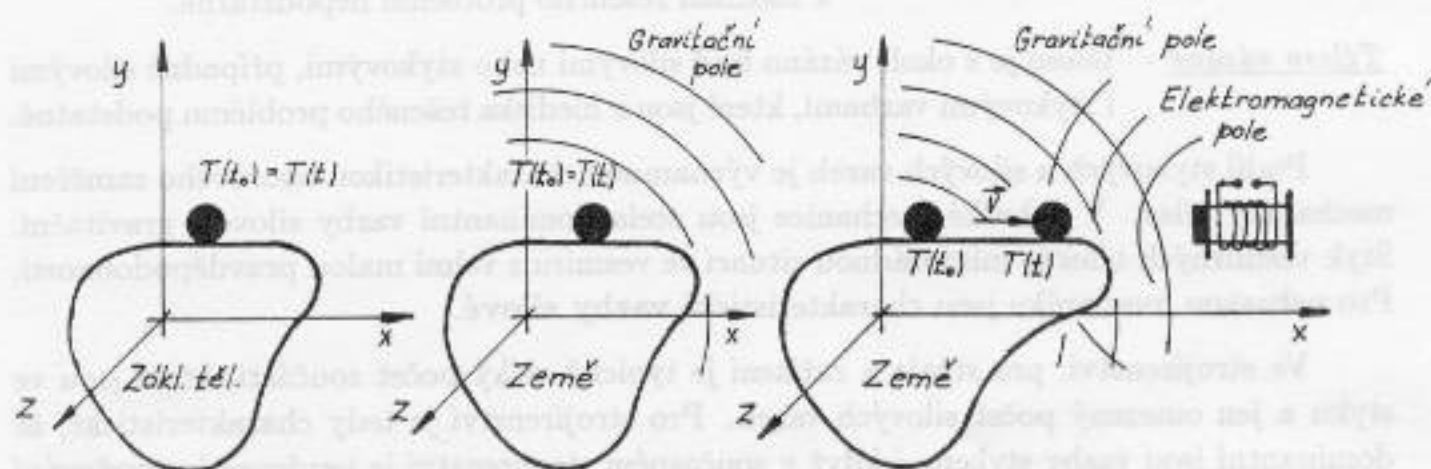
f) těleso je ve styku se základním tělesem a nachází se v gravitačním poli zemském viz obr. 11b

- těleso zůstává v klidu, vazba stykem omezuje pohyb tělesa jako celku ve směru osy y.

g) těleso je ve styku se základním tělesem a nachází se v gravitačním poli zemském a elektromagnetickém poli viz obr. 11c

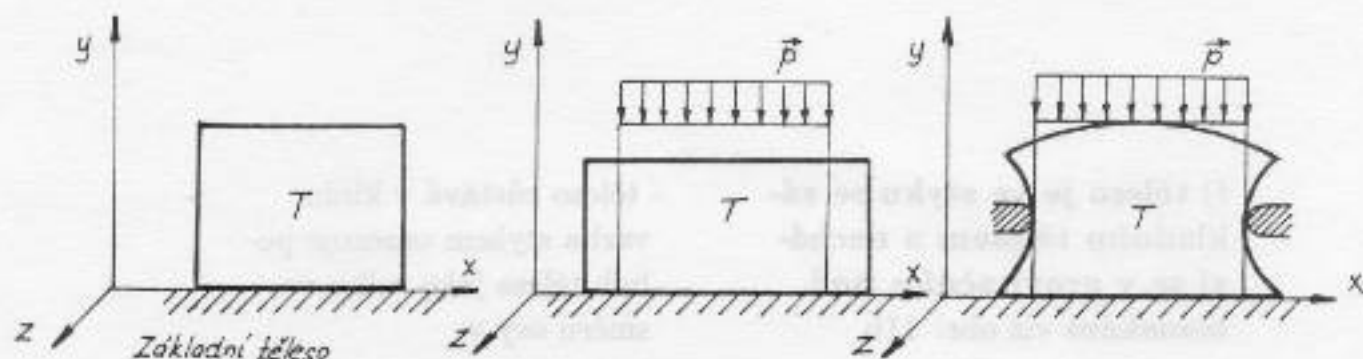
- těleso se pohybuje ve směru osy x. Charakter pohybu závisí na charakteru elektromagnetického pole a silových podmínkách ve styku. Pohyb tělesa jako celku je stykovou vazbou ve směru osy y omezen a ve směru osy x je ovlivněn oběma vazbami.

Je-li těleso vázáno stykovou vazbou, pak pohyb tělesa jako celku v místě styku ve směru normály je omezen v důsledku neprostupnosti tělesa. V tečném směru je ovlivněn. Viz obr. 11.



Obr. 11

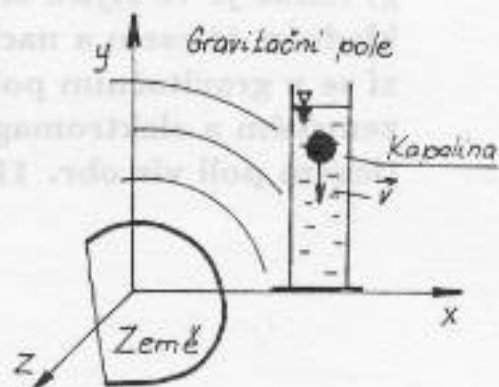
Soustava stykových vazeb nebo vazba se složitou geometrií styku omezuje nejen pohyb tělesa jako celku, ale také deformaci viz obr. 12.



Obr. 12

K **silovým vazbám** vedle vazeb silovými poli patří také vazby stykem tělesa s prostředím (kapalina, plyn). Při styku tělesa s prostředím nedochází k omezení mechanického pohybu, protože prostředí se přizpůsobuje poloze a tvaru tělesa - pohyb pouze ovlivňuje. Viz obr. 13.

Těleso může být ke svému okolí vázáno soustavou vazeb různých typů. Podle významu této soustavy vazeb z hlediska pohybu tělesa jako celku a deformace rozlišujeme:



Obr. 13

Těleso volné - mechanické vazby (silové a stykem) tělesa s okolím jsou nerozlišitelné.

Těleso s nepodstatnými vazbami - mechanické vazby tělesa s okolím jsou rozlišitelné, ale z hlediska řešeného problému nepodstatné.

Těleso vázané - těleso je s okolím vázáno buď silovými nebo stykovými, případně silovými i stykovými vazbami, které jsou z hlediska řešeného problému podstatné.

Podíl stykových a silových vazeb je významnou charakteristikou oborového zaměření mechaniky těles. V nebeské mechanice jsou zcela dominantní vazby silové - gravitační. Styk vesmírných těles je mimořádnou situací ve vesmíru s velmi malou pravděpodobností. Pro nebeskou mechaniku jsou charakteristické **vazby silové**.

Ve strojírenství, pro stroje a zařízení je typický velký počet součástí, které jsou ve styku a jen omezený počet silových vazeb. Pro strojírenství je tedy charakteristické, že dominantní jsou vazby stykem, i když v současném strojírenství je tendence ke zvyšování počtu silových vazeb (hydraulika, pneumatické soustavy, lineární elektromotory atd.). Vazby stykem jsou však stále ve strojírenství **primární**.

Vztah mezi mechanickými vazbami, kterými je těleso vázáno a silovým působením na těleso, vymezený z hlediska mechanického pohybu, je základním vztahem silového přístupu, kterým výklad mechaniky těles začínáme. V souvislosti se silovým přístupem vysvětlíme základní, zdánlivě jednoduchou, ale myšlenkově obtížnou operaci, kterou nazýváme **uvolněním vázaného tělesa**. K uvolnění vázaného tělesa je třeba myšlenkově nahradit mechanické vazby tělesa s okolím silovým působením, silami při zachování funkce tělesa v mechanice těles pohybu tělesa jako celku a deformací. Uvolňování je abstraktní operaci probíhající ve vědomí člověka.

Výsledkem uvolnění vázaného tělesa je uvolněné těleso, na které působí soustava úplně a neúplně určených sil, při zachování pohybového stavu tělesa.

V mechanice těles jako teoretické disciplíně se obtížnost uvolňování zvyšuje tím, že k reálnému tělesu přiřazujeme abstraktní těleso popsané systémem veličin a operace uvolňování se realizuje na tomto abstraktním tělese. Na základě znalostí z fyziky umíme popsat silové působení u některých silových vazeb (např. gravitační) veličinami. Interakci tělesa s okolím, prostřednictvím těchto vazeb, někdy vyjadřujeme v zadání úloh silovým působením bez bližší specifikace určení těchto veličin.

Zdánlivá jednoduchost a skutečná náročnost na jedné straně a závažnost na straně druhé vyžadují, aby operace uvolňování byla cílevědomě a dlouhodobě rozvíjená k jejímu pochopení a vědomému osvojení. Teprve pak je pro člověka jednoduchá.

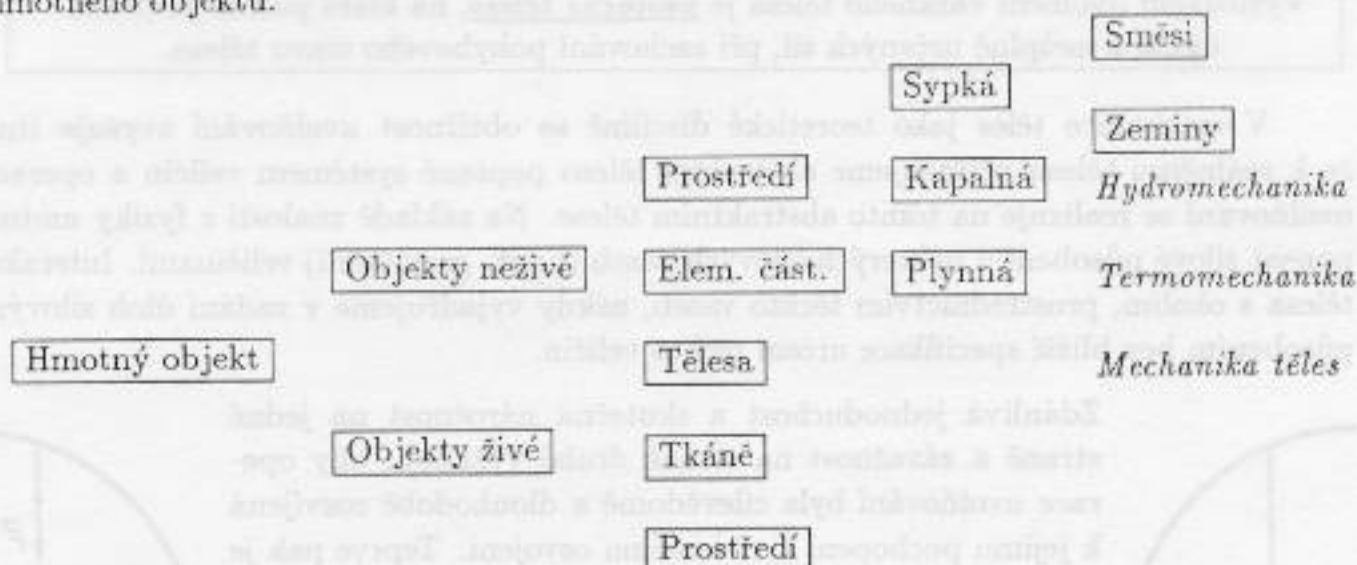
Po vymezení základních pojmů týkajících se jevů a přístupů při vyšetřování a popisu mechanického pohybu těles, vztahů mezi vazbami, kterými je těleso vázáno, změnou mechanického pohybu způsobeného těmito vazbami a silovým působením na těleso, můžeme přistoupit k vymezení předmětu mechaniky a jejímu dalšímu dělení.



Kapitola 4.0

4.1 Vymezení předmětu mechaniky

Mechanika se zabývá vyšetřováním a popisem mechanického pohybu hmotných objektů. Předmět mechaniky je velmi široký a proto se dále dělí. Dělení se týká členění hmotného objektu.



Podle členění hmotného objektu mechaniku dělíme na mechaniku prostředí, kapalin, plynů,.....těles,.... Tělesa lze dále dělit různým způsobem na stroje, budovy, osoby, zvířata. Na strojní fakultě se zabýváme především takovými tělesy, která mají úzký vztah ke strojírenství. Není účelné zabývat se detailně strukturou mechaniky těles. Důležité je však pochopit strukturu předmětů mechaniky těles v základní výuce na fakultě strojní. Zde se historicky mechanika těles dělí na čtyři základní předměty s názvy statika, kinematika, dynamika a pružnost a pevnost. Vymezení obsahu těchto předmětů může být různé. Předměty mechaniky na fakultě strojní mají obsah, který ve stručnosti můžeme popsat takto:

Statika vymezuje:

- základní pojmy
- axiomy
- silový přístup řešení úloh mechaniky
- vyšetřuje**
- popis a typy silových soustav
- statickou ekvivalenci silových soustav
- statickou rovnováhu těles
- pohyb tělesa jako celku jen kvalitativně (mechanický klid)
- deformaci jen zprostředkovaně

Kinematika vyšetřuje:

- pohybový stav tuhých těles a soustav tuhých těles
- vzájemnou časovou závislost veličin popisujících pohybový stav těles (kinematických veličin)
- pohyblivost soustav těles

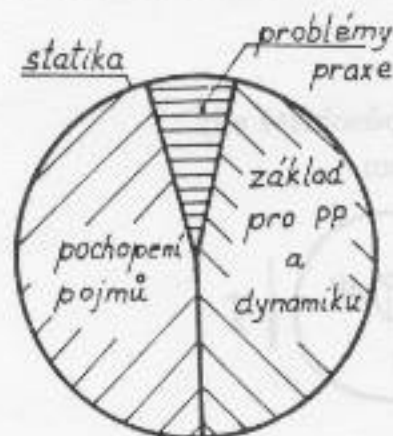
Dynamika vyšetřuje:

- vzájemnou závislost kinematických a silových veličin tuhých těles a jejich soustav

Pružnost a pevnost vyšetřuje:

- vzájemnou závislost silového působení na těleso a deformace, případně porušování soudržnosti těles a soustav těles

Jak jsme uvedli v úvodu na str. 9, předměty mechaniky těles na sebe vzájemně hierarchicky navazují. Předměty vyšší úrovně vycházejí ze znalostí předmětů předcházejících, proto předměty mechaniky těles nelze studovat izolovaně. Je třeba mít na vědomí, že znalost látky z jednoho předmětu je nutnou, ale ne postačující podmínkou zvládnutí látky druhého předmětu. Uvedené hierarchické uspořádání vystihuje jednak složitost jednotlivých předmětů, ale také množství problémů technické praxe, které lze řešit na základě



znalostí získaných v uvedeném předmětu. Samotná statika nám umožní řešit problémy technické praxe, je to však malá část, jak je znázorněno na obr. 15. Hlavním posláním statiky je vytvoření pojmové soustavy mechaniky těles na inženýrské úrovni a základu pro předměty vyšší úrovně, především dynamiku, pružnost a pevnost a předměty specializací. Uvedené skutečnosti dávají statice zvláštní postavení, které spočívá v jednoduchosti a základu pro ostatní předměty. Jednoduchost vyžaduje dokonalé pochopení a osvojení statiky. Bez vybudování dobrého základu nemá smysl pokračovat v další výstavbě mechaniky těles.

Obr. 15

4.2 Silové působení a síla působící na těleso.

Základním pojmem silového přístupu v mechanice těles je pojem silového působení, který jsme v předchozí části skript vymezili. Z hlediska řešeného problému se silové působení může kvalitativně lišit, proto jej dále dělíme na objemové, plošné, liniové silové působení a sílu. Uvedené dělení silového působení vychází z charakteru oblasti, která je z hlediska silového působení významná.

Objemové silové působení - Významné je těleso jako prostorová oblast. Charakter objemového silového působení má působení silových polí např. gravitačního, elektromagnetického, setrvačného atd. Objemové silové působení je určeno, je-li určena oblast Ω , na které působí měrná objemová síla $\vec{\sigma}(x, y, z)$.

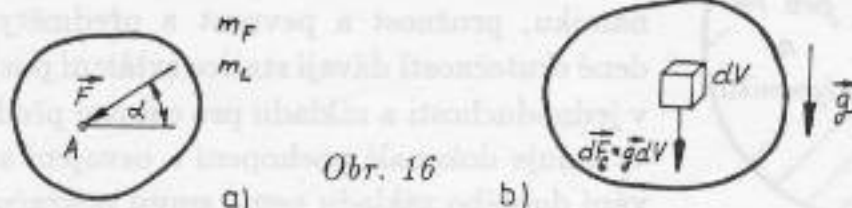
Plošné silové působení - Charakter plošného silového působení má silové působení

mezi tělesy, které je zprostředkováno např. vazbami stykem. Významnou oblastí je plošná oblast. Plošné silové působení je určeno stykovou oblastí Γ a měrnou plošnou silou \vec{p} .

Liniové silové působení - V případě styku těles, kdy stykový útvar má dominantní jeden rozměr, silové působení zprostředkované touto vazbou má charakter liniového silového působení. Liniové silové působení je určeno obecně prostorovou křivkou γ a měrnou liniovou silou \vec{q} .

Síla - V případě styku těles, kdy rozměry stykového útvaru jsou malé a z hlediska řešeného problému a silového působení nepodstatné, pak silové působení nazýváme silou. Přestože základním pojmem silového přístupu v mechanice těles je silové působení, z historicko-logického hlediska je nejvýznamnější pojem síly. Abychom odlišili sílu od ostatních druhů silového působení nazýváme objemové, plošné a liniové silové působení společným názvem rozložené silové působení. Pojem síly jsme podrobně vymezili v předchozí části skript. Další podrobnosti může student nalézt v [1]. Nyní si zopakujeme získané znalosti a uvedeme další vlastnosti síly.

- Síla v bodě A tělesa vyjadřuje působení okolí tělesa na δ okolí bodu A, které je z hlediska řešeného problému nepodstatné. Viz obr. 9 str. 21
- Síla má vlastnosti vektorové veličiny vázané k bodu A.
- Existenci působící síly můžeme vyjádřit ve tvaru:
 - slovním - síla \vec{F} působící v bodě A na těleso T
 - symbolickém - $\{A, \vec{F}\}$, kde A je působiště síly
 - $\{\vec{r}_A, \vec{F}\}$, kde \vec{r}_A je polohový vektor působiště síly
 - $\{\vec{r}_A, \vec{F}\}$ nazýváme silovým bivektorem
- graficky -



- Síla má konečnou velikost. Jestliže v teorii uvažujeme silovou interakci prvku, který má diferenciální rozměry, pak velikost síly je limitně malá viz obr. 16b. - Jednotkou pro vyjádření velikosti síly je N (newton), který můžeme vyjádřit pomocí základních jednotek ve tvaru $N = kgms^{-2}$.

V souladu se znalostmi vektorového a maticového počtu můžeme vyjádřit vztahy mezi vektorem síly, složkami vektoru síly, souřadnicemi atd. takto:

$\{A, \vec{F}\}$ - vektorové vyjádření síly

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$ - složkové vyjádření vektoru síly

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ - souřadnicové vyjádření vektoru síly

$\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ - algebraické vyjádření vektoru síly

$\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ - složky vektoru síly \vec{F} jsou vektory

F_x, F_y, F_z - souřadnice vektoru síly \vec{F} vzhledem k bázi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ v prostoru E_3

jsou reálná čísla

Mezi složkami a souřadnicemi síly platí vztah: (viz obr. 17 b)

$$\vec{F}_x = F_x \vec{i}, \quad \vec{F}_y = F_y \vec{j}, \quad \vec{F}_z = F_z \vec{k}$$

Velikost síly \vec{F} určíme ze vztahu:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{f}} \quad \text{kde } \mathbf{f}^T = [F_x, F_y, F_z]$$

$$\vec{F} \cdot \vec{F} = F \cdot F \cdot \cos \widehat{\vec{F}, \vec{F}} = F^2 \quad \text{kde } \widehat{\vec{F}, \vec{F}} \text{ je úhel dvou vektorů,}$$

$$\text{v našem případě } \vec{F} \text{ a } \vec{F} \rightarrow \widehat{\vec{F}, \vec{F}} = 0 \rightarrow \cos \widehat{\vec{F}, \vec{F}} = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{F} &= (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = F_x \cdot F_x \cdot \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}} + F_x \cdot F_y \cdot \cos \widehat{\vec{i}, \vec{j}} + \\ &+ F_x \cdot F_z \cdot \cos \widehat{\vec{i}, \vec{k}} + F_y \cdot F_x \cdot \cos \widehat{\vec{j}, \vec{i}} + F_y \cdot F_y \cdot \cos \widehat{\vec{j}, \vec{j}} + F_y \cdot F_z \cdot \cos \widehat{\vec{j}, \vec{k}} + \\ &+ F_z \cdot F_x \cdot \cos \widehat{\vec{k}, \vec{i}} + F_z \cdot F_y \cdot \cos \widehat{\vec{k}, \vec{j}} + F_z \cdot F_z \cdot \cos \widehat{\vec{k}, \vec{k}} = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Platí } \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Jednotkový vektor síly určíme ze vztahu

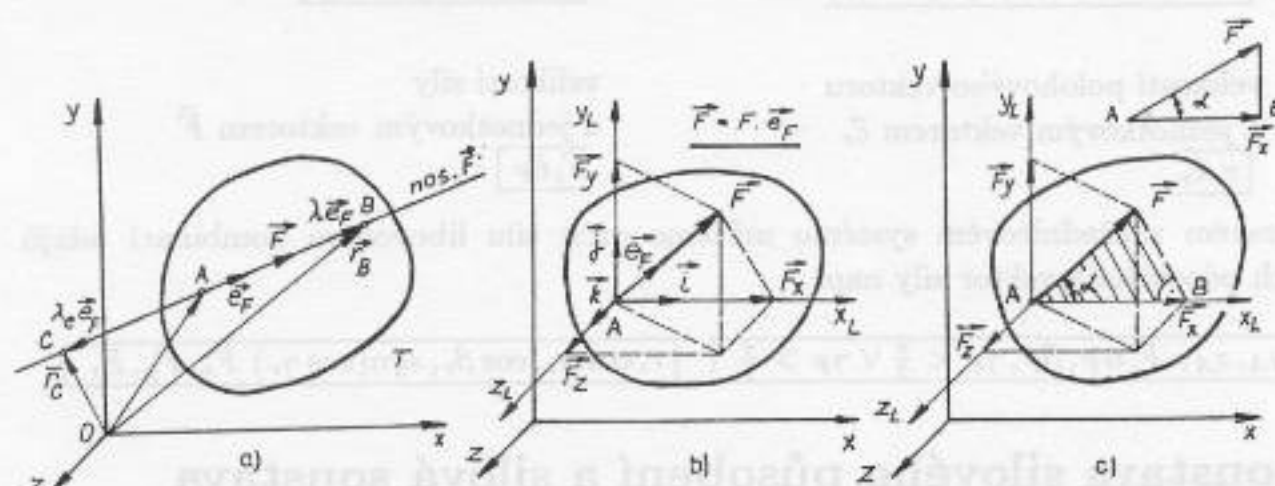
$$\vec{e}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \left(\frac{F_x}{F} \vec{i} + \frac{F_y}{F} \vec{j} + \frac{F_z}{F} \vec{k} \right) = \cos \alpha_F \vec{i} + \cos \beta_F \vec{j} + \cos \gamma_F \vec{k} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

$$\vec{e}_F(c_x, c_y, c_z) \quad \mathbf{c}^T = [c_x, c_y, c_z] \quad \text{viz obr. 17.b a 17.c}$$

$$(\cos \alpha_F = c_x, \cos \beta_F = c_y, \cos \gamma_F = c_z) - \text{směrové kosiny vektoru síly } \vec{F}$$

$$\alpha_F, \beta_F, \gamma_F - \text{směrové úhly vektoru síly } \vec{F}$$

$$|\vec{e}_F| = 1 \quad (\cos^2 \alpha_F + \cos^2 \beta_F + \cos^2 \gamma_F) = (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) = 1 \quad \mathbf{c}^T \mathbf{c} = 1$$



Obr. 17

Rovnice nositelky síly \vec{F} - parametrický tvar (viz obr. 17 a)

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{e}_F - \text{kde } \lambda \in (-\infty, \infty) \text{ např. pro bod C } \lambda = \lambda_c \text{ pak}$$

$$\vec{r}_c = \vec{r}_A + \lambda_c \vec{e}_F - \text{vzhledem k oboru } \lambda \quad \vec{r} \text{ popisuje všechny body nositelky síly } \vec{F}$$

Úhel dvou vektorů \vec{r}_A, \vec{F}_A

$$\vec{r}_A \cdot \vec{F}_A = r_A F_A \cos \widehat{\vec{r}_A \vec{F}_A} \Rightarrow$$

$$\alpha = \widehat{\vec{r}_A \vec{F}_A} = \arccos \frac{\vec{r}_A \cdot \vec{F}_A}{r_A F_A} = \arccos \frac{r_x F_x + r_y F_y + r_z F_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

V maticovém vyjádření: $\alpha = \widehat{\vec{r}_A \vec{F}_A} = \arccos \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} \sqrt{\mathbf{f}^T \mathbf{f}}}$

V mechanice těles a zvláště ve statice je důležité znát různé možnosti vyjádření síly. Síla je určena tehdy, jestliže jsou určeny vlastnosti vyjadřující sílu jako vektorovou veličinu vázanou k bodu. Sílu v kartézském tvaru můžeme vyjádřit těmito soubory údajů.

Působíště

třemi souřadnicemi působíště

$$\boxed{x_A, y_A, z_A}$$

třemi souřadnicemi polohového vektoru

$$\boxed{r_x, r_y, r_z}$$

velikostí polohového vektoru, dvěma jeho kosiny a znaménkem třetího kosinu

$$\boxed{r, \cos \alpha_r, \cos \beta_r, \operatorname{sgn}(\cos \gamma_r)}$$

velikostí polohového vektoru a jednotkovým vektorem \vec{e}_r

$$\boxed{r, \vec{e}_r}$$

Vektor síly

třemi souřadnicemi síly

$$\boxed{F_x, F_y, F_z}$$

velikostí, dvěma směrovými kosiny a znaménkem třetího

$$\boxed{F, \cos \alpha_F, \cos \beta_F, \operatorname{sgn}(\cos \gamma_F)}$$

velikostí, dvěma směrovými úhly a intervalem třetího úhlu

$$\boxed{F, \alpha_F, \beta_F, \gamma_F \leq \frac{\pi}{2}}$$

velikostí síly

a jednotkovým vektorem \vec{F}

$$\boxed{F, \vec{e}_F}$$

V kartézském souřadnicovém systému můžeme určit sílu libovolnou kombinací údajů určujících působíště a vektor síly např.

$$\boxed{x_A, y_A, z_A, F, \alpha_F, \beta_F, \gamma_F < \frac{\pi}{2} \vee \gamma_F > \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{r, \cos \alpha_r, \cos \beta_r, \operatorname{sgn}(\cos \gamma_r), F_x, F_y, F_z}$$

4.3 Soustava silového působení a silová soustava

Dosud jsme uvažovali působení pouze jediné síly nebo rozloženého silového působení na jedné oblasti, což je pro strojírenská tělesa případ zcela ojedinělý. Na těleso ve strojírenství zpravidla působí celá soustava sil nebo silového působení.

Soustava silového působení II - vyjadřuje silové působení okolí objektu (tělesa nebo soustavy těles) na objekt. Soustavu silového působení vyjadřujeme množinou sil s jejich působíšti a oblasti silového působení s definovaným měrným silovým působením, přičemž

působíště sil a oblasti rozloženého silového působení patří k objektu (tělesu nebo soustavě těles) viz obr. 18a.

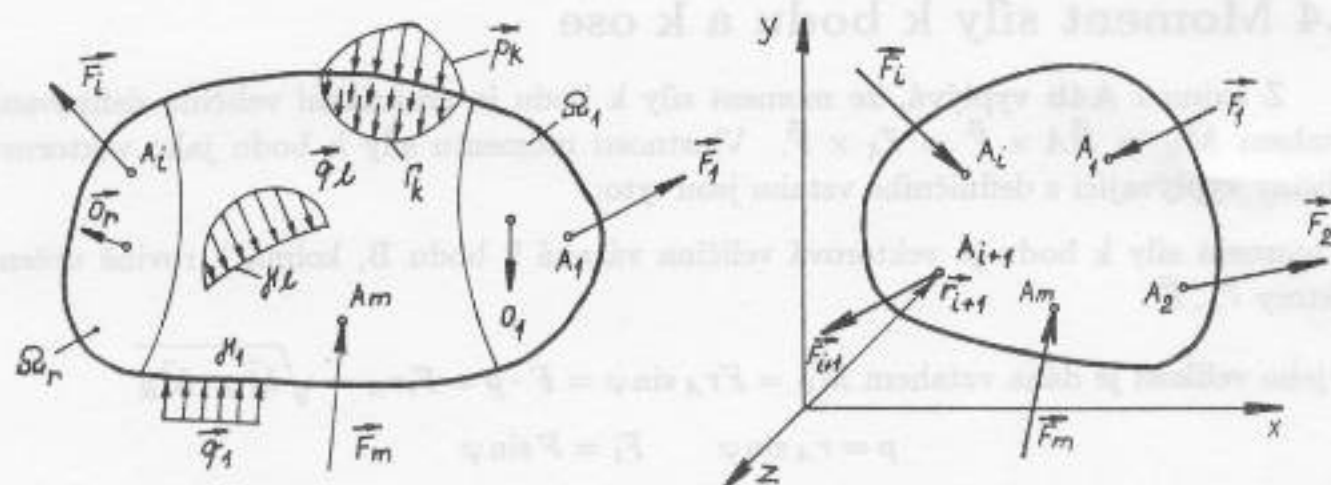
Soustavu silového působení můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Pi = \left\{ \{A_1, \vec{F}_1\} \dots \{A_m, \vec{F}_m\}; \{\Omega_1, \vec{o}_1\} \dots \{\Omega_r, \vec{o}_r\}; \{\Gamma_1, \vec{p}_1\} \dots \{\Gamma_s, \vec{p}_s\}; \{\gamma_1, \vec{q}_1\} \dots \{\gamma_t, \vec{q}_t\} \right\}$$

Silová soustava π - je soustavou silového působení na objekt, jejímiž prvky jsou pouze síly a jejich působíště viz obr. 18b.

Silovou soustavu můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\pi = \left\{ \{A_1, \vec{F}_1\}, \dots, \{A_i, \vec{F}_i\}, \dots, \{A_m, \vec{F}_m\} \right\} = \left\{ \{\vec{r}_1, \vec{F}_1\}, \dots, \{\vec{r}_i, \vec{F}_i\}, \dots, \{\vec{r}_m, \vec{F}_m\} \right\}$$



Obr. 18a,b

Vzhledem k tomu, že ve statice sledujeme osvojení si znalostí pro modelování konkrétních problémů z oblastí strojírenství, budeme se zabývat soustavami silového působení a silovými soustavami. **Každou soustavu silového působení si budeme vždy spojovat s konkrétním objektem** - tělesem nebo soustavou těles, na které působí. Jednotlivé síly nebo silová působení mohou mít různou podstatu. Při řešení inženýrských problémů technické praxe musíme rozlišovat různou podstatu silového působení, na které závisí také jeho vyjádření. Výklad podstaty i vyjádření silového působení patří především do fyziky (např. podstata gravitačního pole, $F = \kappa \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$). Ve statice jako části mechaniky těles není předmětem zájmu podstata silového působení, podstatným je popis umožňující vyjádření silového působení v souřadnicovém, vektorovém, maticovém tvaru z hlediska mechanického pohybu.

Uvažujeme-li působení více silových prvků na těleso, pak je nutné umět rozlišit, kdy jejich působení je z mechanického hlediska stejné. Ve statice se omezíme na posouzení silového působení z hlediska pohybu tělesa jako celku.

Uvažujme tuto situaci: Necht' na těleso T působí v čase t_1 v bodě A_1 síla \vec{F}_1 a v čase t_2 v bodě A_2 síla \vec{F}_2 . Nyní vyvstává otázka, zda jsme schopni posoudit, je-li působení síly \vec{F}_1 z hlediska pohybu tělesa jako celku stejné s působením síly \vec{F}_2 . Odpověď na tuto otázku je velice jednoduchá, jedná-li se o reálné těleso a zní ANO. Podíváme se, jak se těleso

pohybuje, působí-li na něj v bodě A_1 síla \vec{F}_1 a jak se pohybuje při působení síly \vec{F}_2 v bodě A_2 . Je-li pohyb tělesa jako celku při působení síly $\{A_1, \vec{F}_1\}$ stejný jako při působení $\{A_2, \vec{F}_2\}$, pak působení sil $\{A_1, \vec{F}_1\}$ a $\{A_2, \vec{F}_2\}$ je z hlediska pohybu tělesa jako celku pohybově ekvivalentní. (Vymezením pojmu ekvivalence se budeme podrobně zabývat v kapitole 5.) Při řešení problémů současné strojírenské praxe je uvedená situace ojedinělá. Ve většině případů máme těleso i silové působení vyjádřeno abstraktně, veličinami. Pak jsme schopni na uvedenou otázku odpovědět tehdy, umíme-li vyjádřit působení síly $\{A, \vec{F}\}$ v libovolném bodě. Z axiomu A4b vyplývá, že působení síly $\{A, \vec{F}\}$ je z hlediska pohybové ekvivalence jednoznačně určeno v libovolné bodě B **veličinou** \vec{F} a **momentem** $\vec{M}_B = \vec{B}A \times \vec{F}$. Z uvedeného je zřejmý význam momentu síly k bodu v mechanice těles, proto se dále touto veličinou budeme zabývat.

4.4 Moment síly k bodu a k ose

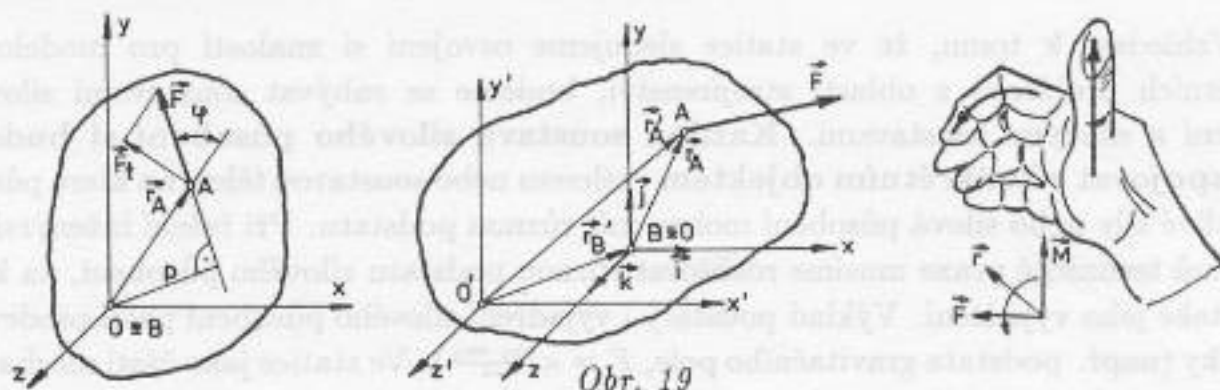
Z axiomu A4b vyplývá, že moment síly k bodu je abstraktní veličina definovaná vztahem $\vec{M}_B = \vec{B}A \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}$. Vlastnosti momentu síly k bodu jako vektorové veličiny vyplývající z definičního vztahu jsou tyto:

a) moment síly k bodu je vektorová veličina vázaná k bodu B, kolmá k rovině určené vektory \vec{r}_A, \vec{F}

b) jeho velikost je dána vztahem $M_B = Fr_A \sin \varphi = F \cdot p = F_t r_A = \sqrt{\vec{M}_B \cdot \vec{M}_B}$

$$p = r_A \sin \varphi \quad F_t = F \sin \varphi$$

c) jeho smysl je určen tak, aby vektory $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}_B$ v uvedeném pořadí tvořily pravotočivý systém. Viz obr. 19c.



Zvolíme-li souřadnicový systém v bodě B, pak souřadnice polohového vektoru \vec{r}_A jsou $(x'_A - x'_B, y'_A - y'_B, z'_A - z'_B) = (x_A, y_A, z_A)$ a souřadnice síly \vec{F} (F_x, F_y, F_z). Moment síly \vec{F} k bodu B můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$(4.1) \quad \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F} = (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \\ x_A F_x (\vec{i} \times \vec{i}) + x_A F_y (\vec{i} \times \vec{j}) + x_A F_z (\vec{i} \times \vec{k}) + y_A F_x (\vec{j} \times \vec{i}) + y_A F_y (\vec{j} \times \vec{j}) \\ + y_A F_z (\vec{j} \times \vec{k}) + z_A F_x (\vec{k} \times \vec{i}) + z_A F_y (\vec{k} \times \vec{j}) + z_A F_z (\vec{k} \times \vec{k})$$

Pro vektorový součin jednotkových vektorů platí $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}| \sin \widehat{ij} = 0$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad (4.2)$$

s využitím vztahů (4.2) obdržíme:

$$\vec{M}_B = (y_A F_z - z_A F_y) \vec{i} + (z_A F_x - x_A F_z) \vec{j} + (x_A F_y - y_A F_x) \vec{k} \quad (4.3)$$

Z vektorového počtu víme, že vektorový součin můžeme vyjádřit determinantem, který pro moment síly k bodu bude mít následující tvar:

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \vec{k} = \quad (4.4)$$

$$= (y_A F_z - z_A F_y) \vec{i} + (z_A F_x - x_A F_z) \vec{j} + (x_A F_y - y_A F_x) \vec{k} \quad (4.5)$$

Výrazy v závorkách u jednotkových vektorů jsou souřadnice momentu \vec{M}_B , vzhledem k souřadnicovému systému určenému bodem O a jednotkovými vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Směrové úhly momentu \vec{M}_B jsou vyjádřeny vztahy

$$\cos \alpha_M = \frac{M_x}{M_B} \quad \cos \beta_M = \frac{M_y}{M_B} \quad \cos \gamma_M = \frac{M_z}{M_B}$$

kde M_B je velikost momentu \vec{M}_B . Souřadnice momentu \vec{M}_B vyjádřené vztahem (4.4) můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} M_x &= 0 \cdot F_x - z_A F_y + y_A F_z = 0 \cdot x_A + F_z y_A - F_y z_A \\ M_y &= z_A F_x + 0 \cdot F_y - x_A F_z = -F_z x_A + 0 \cdot y_A + F_x z_A \\ M_z &= -y_A F_x + x_A F_y + 0 \cdot F_z = F_y x_A - F_x y_A + 0 \cdot z_A \end{aligned} \quad (4.6)$$

nebo stručně v maticovém tvaru $\mathbf{m} = \mathbf{R}\mathbf{f}$, $\mathbf{m} = \mathbf{F}\mathbf{r}$

kde

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -z_A & y_A \\ z_A & 0 & -x_A \\ -y_A & x_A & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_z & -F_y \\ -F_z & 0 & F_x \\ F_y & -F_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

Z uvedených vlastností momentu síly k bodu můžeme odvodit další důležité vlastnosti momentu síly k bodu.

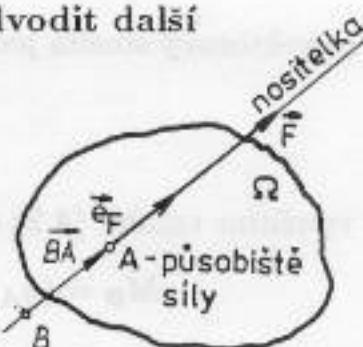
1) Kdy je moment síly k bodu nulový?

Když

a) $F=0$

b) $F \neq 0, \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ nositelka síly prochází bodem B

Obr. 20



2) Jaký je vztah mezi momentem síly a momenty složek síly k bodu B ?

$$(4.8) \quad \vec{M}_B = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_A \times (\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z) = \vec{r}_A \times \vec{F}_x + \vec{r}_A \times \vec{F}_y + \vec{r}_A \times \vec{F}_z$$

Moment \vec{M}_B síly \vec{F} k bodu B je roven součtu momentů složek $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ k bodu B.

3) Moment silové výslednice ($\vec{F}_V = \sum \vec{F}_i$) soustavy sil se společným působištěm

$$(4.9) \quad \vec{M}_B = \sum \vec{M}_{Bi} = \sum (\vec{r}_A \times \vec{F}_i) = \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_i = \vec{r}_A \times \vec{F}_V$$

Moment soustavy sil se společným působištěm je roven momentu výslednice k bodu B. (**POZOR**, platí pouze pro soustavu sil centrální a se společným působištěm) Vlastnosti 2) a 3) se nazývají **Varingnonovy věty**.

4) Existence bodů, ke kterým síla $\vec{F} \neq \vec{0}$ působící v bodě A tělesa má stejný moment jako k bodu B. Viz obr. 21

Pro libovolný bod C s požadovanou vlastností platí

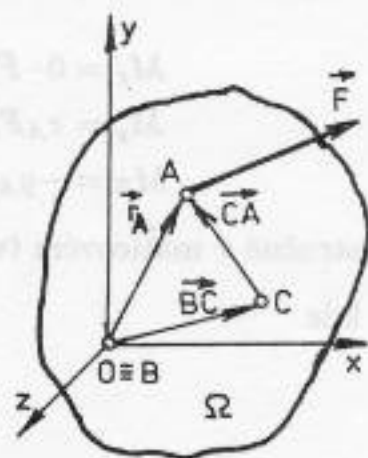
$$\vec{M}_B = \vec{M}_C \quad \vec{M}_B = \vec{B}A \times \vec{F} = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_C = \vec{C}A \times \vec{F} \quad \vec{B}A = \vec{B}C + \vec{C}A$$

$$\vec{M}_C = \vec{C}A \times \vec{F} = (\vec{B}A - \vec{B}C) \times \vec{F} =$$

$$\vec{B}A \times \vec{F} - \vec{B}C \times \vec{F} = \vec{M}_B - \vec{B}C \times \vec{F}$$

Odtud $\vec{M}_C = \vec{M}_B$ tehdy a jen tehdy, je-li $\vec{B}C \times \vec{F} = \vec{0}$. Tato podmínka je splněna jestliže $\vec{B}C = \vec{0}$ nebo $\sin \beta = 0$, kde β je úhel mezi polohovým vektorem $\vec{B}C$ a silou \vec{F} .



$$\vec{B}C = \vec{0} \Rightarrow B \equiv C \quad \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \vec{B}C \parallel \vec{F} \quad \text{Obr. 21}$$

Geometrickým místem bodů C, ke kterým $\vec{M}_B = \vec{M}_C$ je přímka rovnoběžná s \vec{F} procházející bodem B.

5) Vlastnosti složek momentu \vec{M}_B ve směru souřadnicových os.

Složky momentu \vec{M}_B vyjádříme ve tvaru

$$\vec{M}_x = M_x \vec{i} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \vec{i} \quad \vec{M}_y = M_y \vec{j} = - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \vec{j} \quad \vec{M}_z = M_z \vec{k} = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Z vyjádření složky \vec{M}_x , které neobsahuje souřadnici x_A vyplývá, že složka momentu \vec{M}_B ve směru osy x není závislá na souřadnici x_A , takže složka \vec{M}_x je stejná pro všechny body osy x . Vektorovou veličinu \vec{M}_x nazýváme momentem síly \vec{F} k ose x a zcela obdobně \vec{M}_y momentem síly \vec{F} k ose y a \vec{M}_z momentem síly \vec{F} k ose z . Moment síly \vec{F} k ose je tedy složkou momentu síly k libovolnému bodu osy ve směru osy, což můžeme zapsat takto:

$$\vec{M}_x = (\vec{M}_B \cdot \vec{i}) \vec{i} = \left[\left(\begin{vmatrix} y_A & z_A \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot \vec{i} \right] \vec{i} =$$

$$\begin{vmatrix} y_A & z_A \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \vec{i} = (y_A F_z - z_A F_y) \vec{i}$$

obdobně

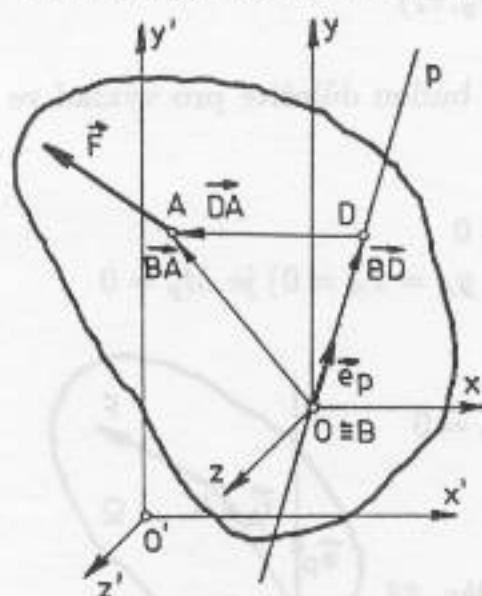
$$\vec{M}_y = (\vec{M}_B \cdot \vec{j}) \vec{j} = (z_A F_x - x_A F_z) \vec{j} \quad \vec{M}_z = (x_A F_y - y_A F_x) \vec{k} \quad (4.10)$$

V předchozím jsme definovali moment síly k ose souřadnicového systému. Vzhledem k tomu, že moment síly \vec{F} k bodu není závislý na volbě souřadnicového systému ($\vec{M}_B = \vec{B}A \times \vec{F}$), můžeme moment síly \vec{F} k libovolné ose p definovat obdobně.

Moment \vec{M}_p síly \vec{F} působící v bodě A tělesa je složkou momentu síly \vec{F} k libovolnému bodu B osy p ve směru osy p .

$$\vec{M}_p = (\vec{M}_B \cdot \vec{e}_p) \vec{e}_p = [(\vec{B}A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p \quad (4.11)$$

kde \vec{e}_p je jednotkový vektor ve směru osy p . Dále ukážeme, že \vec{M}_p nezávisí na volbě bodu B . D je libovolný bod přímky p .



$$\vec{B}D = \lambda \vec{e}_p \quad \vec{B}A = \vec{B}D + \vec{D}A = \vec{D}A + \lambda \vec{e}_p$$

$$\vec{M}_p = (\vec{M}_B \cdot \vec{e}_p) \vec{e}_p = [(\vec{B}A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p =$$

$$\left\{ [(\vec{D}A + \lambda \vec{e}_p) \times \vec{F}] \cdot \vec{e}_p \right\} \vec{e}_p =$$

$$[(\vec{D}A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p + [(\lambda \vec{e}_p \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p =$$

$$[(\vec{D}A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p = (\vec{M}_D \cdot \vec{e}_p) \vec{e}_p$$

$$(\lambda \vec{e}_p \times \vec{F}) \perp \vec{e}_p \implies (\lambda \vec{e}_p \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = 0$$

Obt. 22

6) Vztah mezi momentem síly k bodu B a momenty síly ke třem různým osám p_1, p_2, p_3 procházející bodem B. Z vektorového počtu je známo, že je splněn vztah

$$(4.12) \quad \vec{M}_B = \vec{M}_{p_1} + \vec{M}_{p_2} + \vec{M}_{p_3}$$

jestliže přímky p_1, p_2, p_3 jsou různé a neleží v jedné rovině. Moment \vec{M}_B síly k bodu B je roven vektorovému součtu momentů síly \vec{F} ke třem různým osám, které procházejí bodem B a neleží v jedné rovině.

Moment \vec{M}_p síly \vec{F} k ose p je vektorová veličina, která má následující vlastnosti:

- je vektorovou veličinou vázanou k přímce (viz def.)
- souřadnice M_p je dána smíšeným součinem $M_p = (\vec{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p$, který jak známo z vektorového počtu můžeme vyjádřit ve tvaru.

$$(4.13) \quad M_p = \begin{vmatrix} \cos \alpha_p & \cos \beta_p & \cos \gamma_p \\ x'_A - x'_B & y'_A - y'_B & z'_A - z'_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$F_x (z_A \cos \beta_p - y_A \cos \gamma_p) + F_y (x_A \cos \gamma_p - z_A \cos \alpha_p) + F_z (y_A \cos \alpha_p - x_A \cos \beta_p)$$

Nebo v maticovém tvaru

$M_p = \mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{f}$, kde \mathbf{r} a \mathbf{f} jsou sloupcové matice - viz (4.7a) a matice \mathbf{D}

$$(4.14) \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \gamma_p & -\cos \beta_p \\ -\cos \gamma_p & 0 & \cos \alpha_p \\ \cos \beta_p & -\cos \alpha_p & 0 \end{bmatrix} \text{ resp. } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & c_z & -c_y \\ -c_z & 0 & c_x \\ c_y & -c_x & 0 \end{bmatrix}$$

kde

$$\vec{e}_p = (\cos \alpha_p, \cos \beta_p, \cos \gamma_p) = (c_x, c_y, c_z)$$

Některé další vlastnosti momentu síly \vec{F} k ose, které budou důležité pro výklad ve staticce

1) Kdy je moment síly k ose nulový?

když $\vec{M}_p = M_p \vec{e}_p = \vec{0}$; $\vec{e}_p \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_p = \vec{0} \Leftrightarrow M_p = 0$

Neuvážujeme-li triviální případy $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{BA} = \vec{0}$ ($x_A = y_A = z_A = 0$) je $M_p = 0$

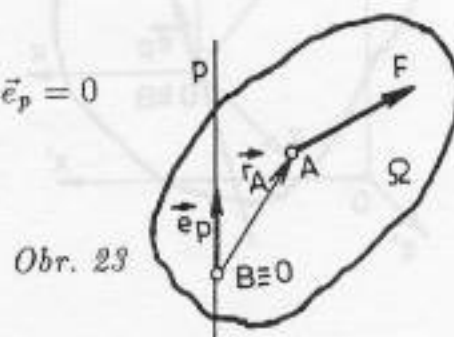
když

$-\vec{F} \parallel \vec{e}_p$ - osa p je \parallel s nositelkou síly \vec{F}

$$\vec{M}_B = (\vec{BA} \times \vec{F}) \perp \vec{F} \Rightarrow (\vec{BA} \times \vec{F}) \perp \vec{e}_p \Rightarrow (\vec{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = 0$$

$-\vec{r}_A \parallel \vec{F}$ - nositelka síly \vec{F} protíná osu p v bodě B

$$(\vec{r}_A \times \vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow (\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = 0$$



Obr. 23

- nositelka síly \vec{F} protíná osu p -

$$\rho(\vec{e}_p, \vec{F}), \quad B \in \vec{e}_p, \quad A \in \text{nos} \vec{F} \implies \vec{BA} \in \rho$$

$$\vec{e}_p, \vec{F}, \vec{BA} \text{ leží v jedné rovině} \implies (\vec{BA} \times \vec{F}) \perp \rho \implies (\vec{BA} \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p = 0$$

Pamatovat: Moment \vec{M}_p síly $\vec{F} \neq \vec{0}$ k ose p je nulový, jestliže nositelka síly \vec{F} je rovnoběžná s osou p nebo ji protíná!

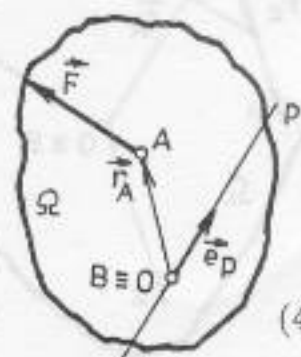
2) Existence osy p , procházející bodem B tělesa, pro kterou platí $\vec{M}_p = \vec{M}_B$

Existuje-li v tělese taková osa, pak platí:

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = [(\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p = M_p \vec{e}_p$$

ρ je rovina určená vektorovými veličinami \vec{r}_A, \vec{F} , $\rho = (\vec{r}_A, \vec{F})$

$$(\vec{r}_A \times \vec{F}) \perp \rho = \vec{e}_p \perp \rho \quad (4.15)$$



Obr. 24

$M_B = r_A \cdot F \cdot \sin \alpha$ - α je úhel polohového vektoru \vec{r}_A a síly \vec{F} .

$M_p = (r_A \cdot F \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \beta$ - β je úhel momentu \vec{M}_B a vektoru \vec{e}_p .

Ze vztahu (4.15) $\implies \cos \beta = \pm 1$.

Orientaci osy p určíme tak, aby $\vec{e}_p = \vec{e}_{M_p}$, pak $M_p = M_B$.

Platí tedy:

Podmínka $\vec{M}_p = \vec{M}_B$ je splněna pro osu procházející bodem B a kolmou na rovinu

$\rho = (\vec{r}_A, \vec{F})$, přičemž $\vec{e}_p = \vec{e}_{M_p}$.

Praktické určování momentu síly k ose:

a) Ze vztahu $\vec{M}_p = [(\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p$ dosazením konkrétních číselných hodnot. Výhoda: není nutné přemýšlet o volbě souřadnicového systému, tento způsob je vhodný pro zpracování v programu pro počítač.

b) S využitím vlastností momentu síly k ose se snahou po formálně nejjednodušším vyjádření. Při určování momentu síly \vec{F} k ose p s výhodou využijeme vztahu mezi momentem síly k bodu B a složkami momentu síly \vec{F} (4.8). Moment síly \vec{F} k ose p pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$\vec{M}_p = [(\vec{r}_A \times \vec{F}) \cdot \vec{e}_p] \vec{e}_p = \left\{ \left[\vec{r}_A \times (\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z) \right] \cdot \vec{e}_p \right\} \vec{e}_p$$

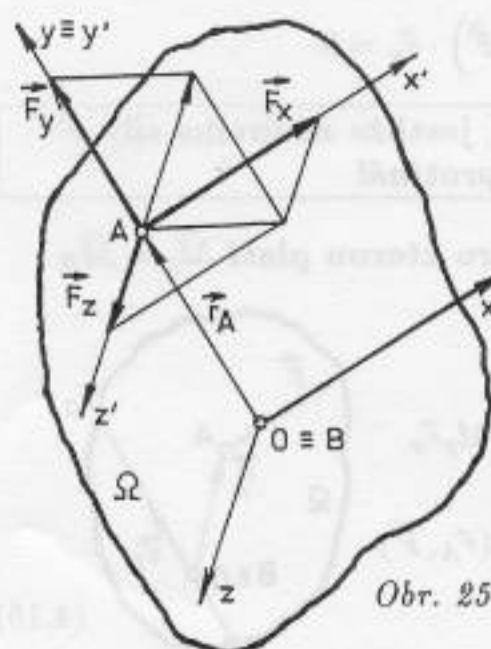
kde $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ jsou složky síly \vec{F} vzhledem k souřadnicovému systému.

Pokud souřadnicový systém mohu volit, volím jej vhodně např. tak, aby

$$\vec{e}_p = \vec{i} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}_A}{r_A} \quad \text{a} \quad A \in \rho(y, z) \quad O \in p \quad \text{viz obr. 25}$$

pak platí

$$\vec{M}_p = \left\{ \left[\vec{r}_A \vec{j} \times \left(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \right) \right] \cdot \vec{i} \right\} \vec{i} = \left\{ \left[r_A F_x (-\vec{k}) + r_A F_z (\vec{i}) \right] \cdot \vec{i} \right\} \vec{i} = r_A F_z \vec{i}$$



Obr. 25

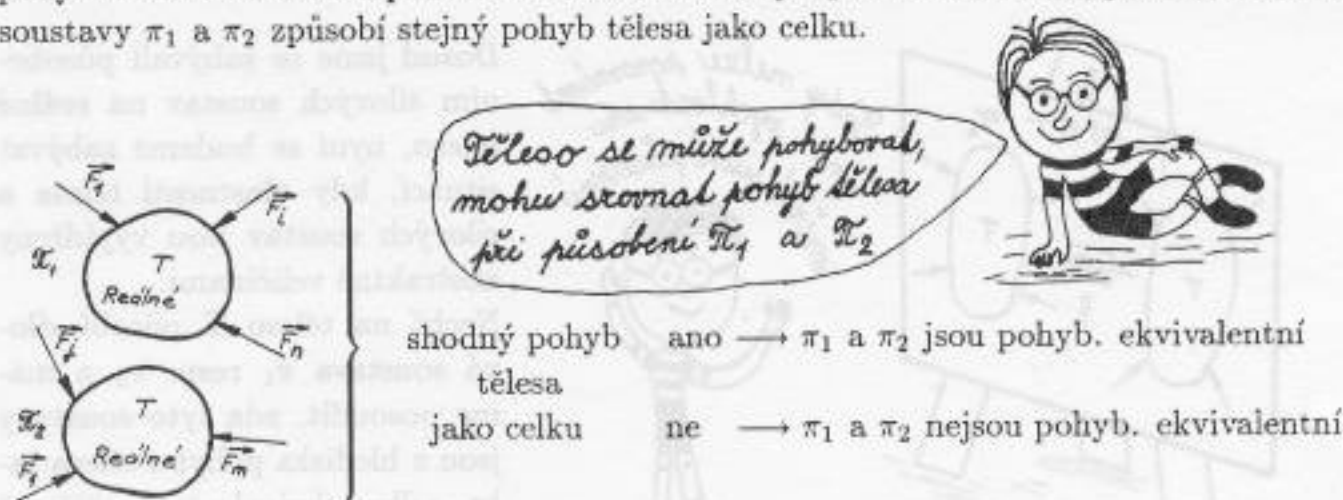
Ke stejnému výsledku přijdeme využitím znalosti o nulovosti momentu k ose (viz vlastnost 1). Moment složky \vec{F}_x k ose p je nulový, protože nositelka síly \vec{F}_x je rovnoběžná s osou p. Moment složky \vec{F}_y k ose p je nulový, protože nositelka síly \vec{F}_y protíná osu p. Moment složky \vec{F}_z k ose p je roven $\vec{r}_A \times \vec{F}$, tedy $\vec{M}_p = r_A \vec{j} \times F_z \vec{k} = r_A F_z \vec{i}$. Výsledný vztah pro velikost ($r_A \cdot F_z$) je nejjednodušší možný, ale určení \vec{M}_p vyžaduje vhodnou volbu souřadnicového systému a použití pravé ruky pro určení orientace. Tento způsob je vhodný pro ruční výpočet.

Kapitola 5.0

Statická ekvivalence a rovnováha

Obsahem pojmu *ekvivalence* je vztah mezi objekty charakterizovaný shodností určitých, předem vymezených veličin. Ekvivalence neznamena ani shodnost, ani totožnost objektů. Ekvivalence reálných objektů nemá význam, pokud není vymezena množina charakteristických veličin a není určen název příslušné ekvivalence. Pokud hovoříme o ekvivalenci reálných objektů, musíme přívlastkem specifikovat o jakou ekvivalenci se jedná.

Pohybová ekvivalence - se týká ekvivalence silových soustav, které vzniknou uvolněním **silových vazeb**, kterými je vázáno reálné těleso. Silové vazby pohyb tělesa pouze ovlivňují, ale neomezují, pohyb tělesa jako celku je možný. Charakteristickou veličinou je pohyb tělesa jako celku. Pak platí: Působení silové soustavy π_1 na reálné těleso T, je pohybově ekvivalentní s působením silové soustavy π_2 na totéž těleso, jestliže obě silové soustavy π_1 a π_2 způsobí stejný pohyb tělesa jako celku.



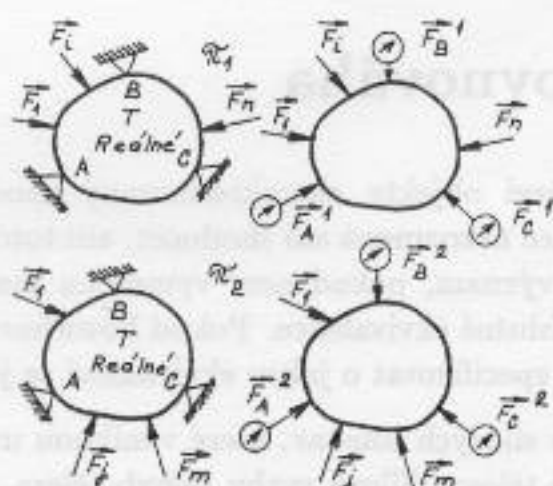
Statická pohybová ekvivalence - Je-li stejným pohybem tělesa jako celku mechanický klid, pak hovoříme o statické pohybové ekvivalenci.

Vazbová ekvivalence - Necht' na nepohyblivě vázané reálné těleso T působí silová soustava π_1 resp. silová soustava π_2 , které vzniknou uvolněním silových vazeb. Silové soustavy π_1 a π_2 jsou vazbově ekvivalentní, jestliže způsobí stejné charakteristiky silového působení ve vazbách z hlediska pohybové ekvivalence a shodný klidový stav z hlediska pohybu tělesa jako celku.

Silové soustavy π_1 a π_2 působí na reálné těleso, proto silové působení ve vazbách můžeme změřit.

Statická vazbová ekvivalence - Je-li uložení tělesa staticky určité (výsledné stykové síly můžeme určit z podmínek statické rovnováhy), pak silové soustavy π_1 a π_2 jsou staticky vazbově ekvivalentní, jestliže způsobí stejné stykové síly, tedy

$$\vec{F}_A^1 = \vec{F}_A^2 \quad \vec{F}_B^1 = \vec{F}_B^2 \quad \vec{F}_C^1 = \vec{F}_C^2 \quad (5.1)$$

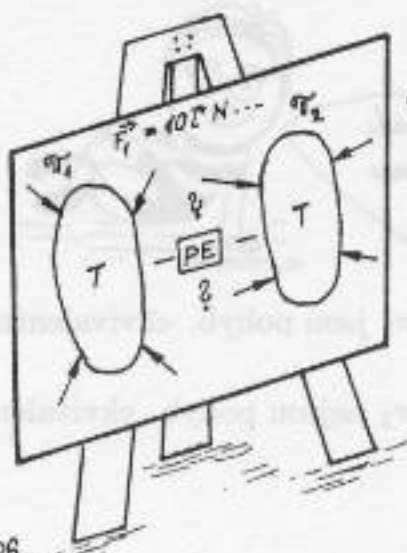


Nyní měříme silové působení

je-li $\vec{F}_A^1 = \vec{F}_A^2$, $\vec{F}_B^1 = \vec{F}_B^2$, $\vec{F}_C^1 = \vec{F}_C^2$
pak je π_1 staticky vazbově
ekvivalentní s π_2



Statická ekvivalence - Společné označení pro statickou pohybovou a statickou vazbovou ekvivalenci.



*Když nelze porovnávat
ani rychlost ani
měřítko silové působení*



Dosud jsme se zabývali působením silových soustav na reálné těleso, nyní se budeme zabývat situací, kdy vlastnosti tělesa a silových soustav jsou vyjádřeny abstraktně veličinami.

Nechť na těleso T působí silová soustava π_1 resp. π_2 a máme posoudit, zda tyto soustavy jsou z hlediska pohybu tělesa jako celku ekvivalentní, přičemž podstatné vlastnosti tělesa T a působení silových soustav π_1 a

π_2 jsou z hlediska řešeného problému zadány úplně a správně v **abstraktním tvaru veličinami**. Silové soustavy jsme obdrželi uvolněním silových a stykových vazeb. Silové soustavy π_1 a π_2 můžeme porovnat pouze tehdy, známe-li **vzájemnou závislost mezi působením silové soustavy na těleso a pohybem tělesa jako celku**, vyjádřenou v abstraktním tvaru veličinami. Tato závislost tvoří obsah axiomu **A5b**, který vychází z druhého pohybového Newtonova zákona. Příčinná souvislost pohybu tělesa T jako celku a silového působení je vyjádřena vztahy:

$$(5.2) \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \sum \vec{M}_i$$

kde: \vec{v} – rychlost translačního pohybu;

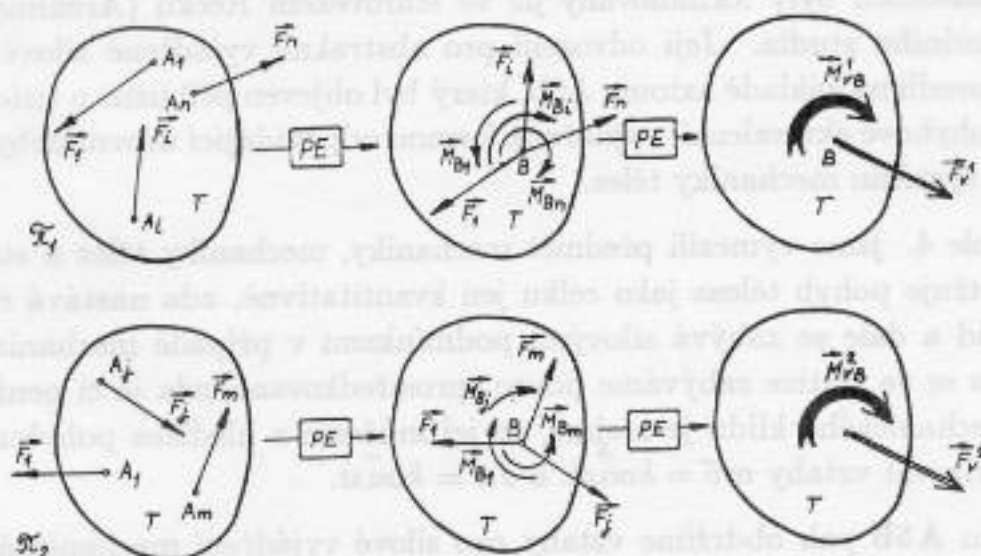
m – hmotnost tělesa;

J – moment setrvačnosti tělesa;

$\vec{\omega}$ – úhlová rychlost tělesa;

t – čas;

Chceme-li srovnat z hlediska pohybové ekvivalence působení silové soustavy π_1 a π_2 na těleso T , musíme si nejdříve vyjádřit působení jednotlivých sil soustavy π_1 v libovolném, ale pro všechny síly stejném bodě B a totéž provést pro síly soustavy π_2 viz obr. 27.



Obr. 27

Veličiny charakterizující působení sil soustavy π_1 $\phi_1 = \{\{\vec{F}_1 \dots \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n\}, \{\vec{M}_1 \dots \vec{M}_i \dots \vec{M}_n\}\}$ jsou vázány ke společnému bodu B , což platí také pro veličiny silové soustavy π_2 . Nyní jednotlivé vektorové veličiny stejného charakteru vektorově sečteme. Pro soustavu π_1 obdržíme

$$\vec{F}_V^1 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - \text{silová výslednice soustavy } \pi_1$$

$$\vec{M}_{VB}^1 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Bi} - \text{momentová výslednice soustavy } \pi_1 \text{ k bodu } B$$

obdobně pro soustavu π_2

$$\vec{F}_V^2 = \sum_{j=1}^m \vec{F}_j - \text{silová výslednice soustavy } \pi_2$$

$$\vec{M}_{VB}^2 = \sum_{j=1}^m \vec{M}_{Bj} - \text{momentová výslednice soustavy } \pi_2 \text{ k bodu } B$$

Jestliže silová soustava π_1 resp. π_2 vyjadřuje významnou interakci tělesa T s okolím z hlediska pohybu tělesa jako celku, pak z vymezení pohybové ekvivalence silových soustav π_1 a π_2 a vztahu mezi pohybovými charakteristikami tělesa a silovým působením na těleso (A5b) vyplývá:

Působení silové soustavy π_1 na těleso T je pohybově ekvivalentní s působením silové soustavy π_2 jestliže platí

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 = \sum \vec{F}_j \quad \wedge \quad \sum \vec{M}_{Bi} = \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2 = \sum \vec{M}_{Bj}$$

což slovně můžeme vyjádřit větou: Silová i momentová výslednice k bodu B soustavy sil π_1 a π_2 jsou stejné.

Odvozená věta je pro mechaniku těles základní větou, proto je formulována jako axiom. K její formulaci vedly praktické zkušenosti od elementárních případů jako jsou páka, kolo na hřídeli až po zkušenosti s konstrukcí nejsložitějších mechanických soustav. Její statické vlastnosti byly formulovány již ve starověkém Řecku (Archimedes) a jsou známy ze základního studia. Její odvození pro abstraktně vyjádřené silové soustavy a těleso, jsme provedli na základě axiomu A5b, který byl objeven přibližně o tisíc let později. Proto věta o pohybové ekvivalenci, vyjádřená formou odpovídající úrovni doby, je součástí axiomatického systému mechaniky těles.

V kapitole 4. jsme vymezili předmět mechaniky, mechaniky těles a statiky s tím, že statika vyšetřuje pohyb tělesa jako celku jen kvantitativně, zda nastává či nenastává mechanický klid a dále se zabývá silovými podmínkami v případě mechanického klidu. Deformací těles se ve staticce zabýváme pouze zprostředkovaně, zda je či není podstatná. Z vymezení mechanického klidu je zřejmé, že jej můžeme z hlediska pohybu tělesa jako celku charakterizovat vztahy $m\vec{v} = konst.$ a $J\vec{\omega} = konst.$

Z axiomu A5b pak obdržíme vztahy pro silové vyjádření mechanického klidu ve tvaru

$$(5.3) \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{0} = \sum \vec{F}_i, \quad \frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \vec{0} = \sum \vec{M}_i$$

Posloupnost stavů tělesa charakterizovanou těmito vztahy nazveme statickou rovnováhou tělesa. Rovnováha je pojem, který charakterizuje neměnnost určitých přesně vymezených veličin v čase. Statickou rovnováhu tělesa můžeme vyjádřit

$$\left. \begin{array}{l} - \text{silově vztahy } \sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum \vec{M}_i = \vec{0} \\ - \text{pohybově z hlediska pohybu tělesa jako celku} \\ \quad \text{vztahy } m\vec{v} = konst. \text{ a } J\vec{\omega} = konst. \\ - \text{slovy - těleso je v mechanickém klidu} \end{array} \right\} \text{STATICÁ ROVNOVÁHA}$$

Těleso T je ve statické rovnováze tehdy a jen tehdy, je-li v mechanickém klidu, který je z hlediska silového působení popsán vztahy

$$\sum \{A_i, \vec{F}_i\} = \{B, \sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \sum \vec{M}_{B_i} = \vec{0}\} = \{B, \vec{F}_V = \vec{0}, \vec{M}_{VB} = \vec{0}\}$$

Z uvedených vztahů je zřejmý význam silové a momentové výslednice z hlediska pohybové ekvivalence silových soustav působících na těleso a statické rovnováhy tělesa. Proto se vlastnostmi a vyjádřením těchto veličin budeme dále zabývat.

5.1 Soustavy silového působení

Silová a momentová výslednice

Uvažujme uvolněné těleso, na které působí soustava sil $\pi = \{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^n$.

V předchozí části jsme vymezili pojmy:

- silová výslednice soustavy sil $\vec{F}_V = \sum \vec{F}_i \quad [N]$
- momentová výslednice soustavy sil $\vec{M}_{VB} = \sum \vec{BA}_i \times \vec{F}_i \quad [Nm]$

a určili jsme jejich význam z hlediska pohybové ekvivalence a statické rovnováhy. Vzhledem k tomu, že statická pohybová ekvivalence je zvláštním případem pohybové ekvivalence, můžeme vyslovit větu:

Působení silové soustavy $\pi = \{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^n$ je ze statického hlediska jednoznačně určeno v bodě B silovou a momentovou výslednicí k bodu B.

Pojem statické hledisko vyjadřuje **pohybovou ekvivalenci a statickou rovnováhu**.

Poznámka: Zvláštním případem silové soustavy je jediná síla.

POZOR !!! \vec{F}_i a \vec{M}_{Bi} jsou kvalitativně různé vektorové veličiny, které nelze "sečítat". Každá má také jinou jednotku $\vec{F} - [N]$, $\vec{M}_{Bi} - [Nm]$.

Působení síly \vec{F} na těleso T je ze statického hlediska jednoznačně vyjádřeno:

- veličinou \vec{F} a bodem A, jejím působištem, nebo
- bivektorovou veličinou $\Phi_B = \{\vec{F}, \vec{M}\}_B$ v bodě B.

Po zavedení kartézského souřadnicového systému v bodě B můžeme bivektorovou veličinu Φ_B vyjádřit v souřadnicovém tvaru v maticovém zápisu

$$\varphi = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad \varphi = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \quad (5.4)$$

Souřadnice momentu, lze podle odst. 4.4 vyjádřit vztahy (4.7). Použitím těchto vztahů obdržíme

$$\varphi_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{R}_B \end{bmatrix} \mathbf{f} = \mathbf{S}_B \mathbf{f} \quad (5.5)$$

kde

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{R}_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Působí-li na těleso T soustava n sil $\pi = \{A, \vec{F}\}_{i=1}^n$, přičemž působíště A_i jsou obecně různá, pak působení této silové soustavy v bodě B vyjádříme ze statického hlediska takto:

a) pro každou sílu vyjádříme bivektorovou veličinu

$$\Phi_{iB} = \left\{ \vec{F}_i, \vec{M}_i \right\}_B$$

b) určíme výsledný silový bivektor

$$\Phi_B = \sum_{i=1}^n \Phi_{iB} = \left\{ \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iB} \right\} = \left\{ \vec{F}_V, \vec{M}_{VB} \right\}$$

Pokud vyjádříme silového působení soustavy π v maticovém tvaru pak platí:

$$\varphi_B = \sum_{i=1}^n \varphi_{iB} = \sum_{i=1}^n S_{iB} f_i$$

Na základě zavedených pojmů a odvozených vztahů můžeme formulovat větu o vyjádření silového působení soustavy π na těleso T ze statického hlediska takto:

Silové působení soustavy π na těleso T je ze statického hlediska v libovolném, ale konkrétně zvoleném bodě B jednoznačně určeno výslednicovým bivektorem Φ .

Dosud jsme se zabývali působením silové soustavy a neuvažovali jsme rozložené silové působení. V odstavci (4.2) jsme vymezili, čím je jednoznačně určeno rozložené silové působení na těleso. Objemové, plošné a liniové silové působení je jednoznačně určeno, jestliže známe rozložení příslušné měrné síly $\vec{f}(x, y, z)$ a oblast, na které působí $\Omega'(x, y, z)$. Rozložené silové působení lze vyjádřit působením neomezeného počtu elementárních sil. Konkrétní vyjádření elementárních sil pro objemové, plošné a liniové rozložené silové působení je v tab. 4.

Silové působení	Měrná síla	Elementární síla	Oblast působení
objemové	$\vec{o}(r) = \vec{o}(x, y, z)$	$d\vec{F}_o = \vec{o}dV$	podoblast tělesa Ω
plošné	$\vec{p}(r) = \vec{p}(x, y, z)$	$d\vec{F}_p = \vec{p}dS$	část povrchu tělesa
liniové	$\vec{q}(r) = \vec{q}(x, y, z)$	$d\vec{F}_q = \vec{q}dl$	křivka na povrchu tělesa

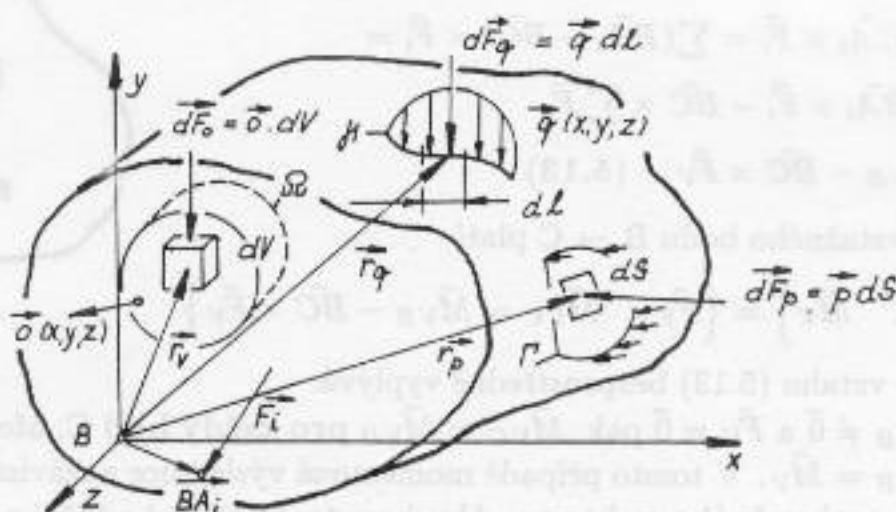
Tab. 4

Silovou výslednici pro soustavu silového působení určíme ze vztahu:

$$(5.9) \quad \vec{F}_V = \int_{\Omega} \vec{o}dV + \int_{\Gamma} \vec{p}dS + \int_{\gamma} \vec{q}dl + \sum \vec{F}_i$$

Momentovou výslednici pro soustavu silového působení určíme ze vztahu:

$$\vec{M}_{VB} = \int_{\Omega} (\vec{r}_o \times \vec{o}) dV + \int_{\Gamma} (\vec{r}_p \times \vec{p}) dS + \int_{\gamma} (\vec{r}_q \times \vec{q}) dl + \sum B\vec{A}_i \times \vec{F}_i \quad (5.10)$$



Obr. 28

Vlastnosti \vec{F}_V a \vec{M}_{VB}

1. Jak vyplývá z definice silové výslednice $\vec{F}_V = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$, \vec{F}_V nezávisí na poloze bodu B a proto ji neoznačujeme \vec{F}_{VB} , ale pouze \vec{F}_V . Silová výslednice \vec{F}_V silové soustavy π působící na těleso je vektorovou veličinou, která má VŽDY charakter volného vektoru. Proto můžeme psát

$$\Phi_B = \{ \vec{F}_V, \vec{M}_V \}_B = \{ \vec{F}_V, \vec{M}_{VB} \} \quad (5.11)$$

2. Je dána soustava sil $\pi = \{ A_i, \vec{F}_i \}$, jejíž výslednice silová je \vec{F}_V a výslednice momentová k bodu B \vec{M}_{VB} . Posuňme nyní působíště sil A_i po jejich nositelkách do nových poloh C_i . Pak platí $A_i C_i = \lambda \vec{e}_{F_i}$. Z definice silové výslednice vyplývá, že \vec{F}_V nezávisí na působíštích sil. Pro momentovou výslednici

- původní soustavy sil platí:

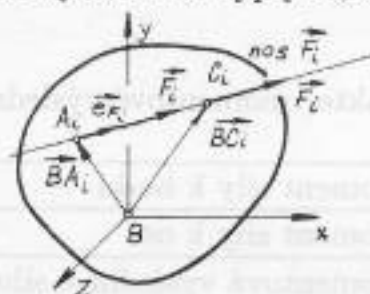
$$\vec{M}_{VB} = \sum B\vec{A}_i \times \vec{F}_i$$

- posunuté soustavy sil platí:

$$\vec{M}'_{VB} = \sum B\vec{C}_i \times \vec{F}_i = \sum (B\vec{A}_i + \lambda \vec{e}_{F_i}) \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum (B\vec{A}_i \times \vec{F}_i) + \sum \lambda F_i (\vec{e}_{F_i} \times \vec{e}_{F_i}) = \vec{M}_{VB} \quad \vec{e}_{F_i} \times \vec{e}_{F_i} = \vec{0}$$

Obr. 29



Závěr: Působení silové soustavy π na těleso T je ze statického hlediska nezávislé na poloze působíšť sil na jejich nositelkách

$$\Phi_B = \{ \vec{F}_V, \vec{M}_{VB} \} = \{ \vec{F}_V, \sum B\vec{A}_i \times \vec{F}_i \} = \{ \vec{F}_V, \sum B\vec{C}_i \times \vec{F}_i \} \quad (5.12)$$

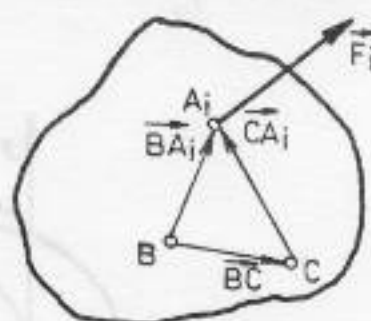
kde C_i - libovolný bod nositelky síly \vec{F}_i

3. Předpokládejme, že známe $\Phi_B = \{\vec{F}_V, \vec{M}_V\}$ v bodě B. Zvolme místo bodu B bod C a vyšetřujme vztah mezi Φ_B a Φ_C . Z vlastnosti 1 $\Rightarrow \vec{F}_{VB} = \vec{F}_V = \vec{F}_{VC}$, protože platí $\vec{BA}_i = \vec{BC} + \vec{CA}_i$ viz obr. 30

$$\begin{aligned}\vec{M}_{VC} &= \sum \vec{CA}_i \times \vec{F}_i = \sum (\vec{BA}_i - \vec{BC}) \times \vec{F}_i = \\ &= \sum \vec{BA}_i \times \vec{F}_i - \vec{BC} \times \sum \vec{F}_i \\ \vec{M}_{VC} &= \vec{M}_{VB} - \vec{BC} \times \vec{F}_V \quad (5.13)\end{aligned}$$

Při změně vztažného bodu $B \rightarrow C$ platí

$$\Phi_C = \{\vec{F}_V, \vec{M}_V\} = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB} - \vec{BC} \times \vec{F}_V\}$$



Obr. 30

4. Ze vztahu (5.13) bezprostředně vyplývá.

Jestliže $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ a $\vec{F}_V = \vec{0}$ pak $\vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB}$ pro každý bod C. Momentová výslednice $\vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB} = \vec{M}_V$. V tomto případě momentová výslednice nezávisí na vztažném bodu - **má vlastnosti volného vektoru**. Abychom tento případ odlišili od případu, kdy momentová výslednice je vázaná k bodu, budeme tuto momentovou výslednici označovat \vec{M} . Silová soustava, která má tuto vlastnost, může být vyjádřené výslednicovým bivektorem

$$(5.14) \quad \Phi = \{\vec{0}, \vec{M}_V = \vec{M}\} = \{\vec{0}, \vec{M}\}$$

5. Z vlastností 1 a 4 vyplývá:

Silová výslednice \vec{F}_V každé silové soustavy je vždy vektorová veličina charakteru volného vektoru. Momentová výslednice v bodě B tělesa je vektorová veličina, jejíž charakter závisí na \vec{F}_V .

$$\begin{aligned}-\vec{F}_V \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_{VB} \neq \vec{0} & \quad \vec{M}_{VB} \text{ má charakter vázaného vektoru k bodu B} \\ -\vec{F}_V = \vec{0} \wedge \vec{M}_{VB} \neq \vec{0} & \quad \vec{M}_{VB} \text{ má charakter volného vektoru,} \\ & \quad \text{v tomto případě použijeme označení } \vec{M}_{VB} = \vec{M}.\end{aligned}$$

Charakter momentové výslednice budeme rozlišovat v slovním vyjádření i v označení.

Moment síly k bodu	$\vec{M}_B, \vec{M}_X, \vec{M}_P$
Moment síly k ose	\vec{M}_x, \vec{M}_p
Momentová výslednice silové soustavy nerozlišujeme charakter vektorové veličiny	\vec{M}_V
Momentová výslednice silové soustavy, která má charakter vektorové veličiny vázané k bodu B	\vec{M}_{VB}
Momentová výslednice, pro kterou je z vyjádření jasné, že se jedná o momentovou výslednici k bodu B	\vec{M}_B
Momentová výslednice, která má charakter volného vektoru	\vec{M}

6. Jestliže silová soustava obsahuje **jedinou nenulovou sílu** $\vec{F} \neq \vec{0}$ působící v bodě A tělesa, pak vždy existuje bod C takový, že $\vec{M}_{VC} \neq \vec{M}_{VB}$. $\vec{F}_V = \vec{F} \neq \vec{0}$ a $\vec{M}_{VB} = \vec{BA} \times \vec{F}$, podle odst. 4.4 věty 4 platí $\vec{M}_B = \vec{M}_C = \vec{CA} \times \vec{F}$, pouze tehdy, jestliže bod C leží na přímce rovnoběžné s nositelkou síly \vec{F} procházející bodem B. Tedy pro všechny body $C \in \{E_3 - p(B, \parallel \text{nos } \vec{F})\}$ platí $\vec{M}_{VB} \neq \vec{M}_{VC}$. Z toho vyplývá:

Nutnou podmínkou pro to, aby momentová výslednice silové soustavy π měla charakter volného vektoru je, že soustava π obsahuje více než jednu sílu.

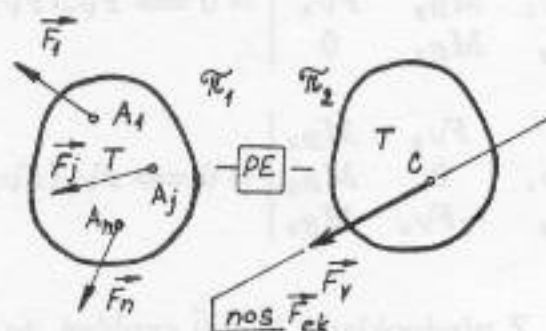
7. Násobíme-li vztah $\vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB} - \vec{BC} \times \vec{F}_V$ formálně silovou výslednicí \vec{F}_V obdržíme $\vec{M}_{VC} \cdot \vec{F}_V = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V - (\vec{BC} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V$ uvažíme-li $(\vec{BC} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V = 0$ pak $\vec{M}_{VC} \cdot \vec{F}_V = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V$.

Veličina $\vec{M}_{VC} \cdot \vec{F}_V$ je nezávislá na poloze vztažného bodu B, je vzhledem k volbě vztažného bodu invariantní (neproměnná). Proto ji budeme nazývat **invariantem silové soustavy a označovat I**. $I = \vec{M}_{VC} \cdot \vec{F}_V$.

Důležitá poznámka: Invariant I nemá v mechanice jiný význam, než nezávislost vzhledem k volbě vztažného bodu pro konkrétní silovou soustavu. Není to veličina mechanická, ale matematická. Hodnota invariantu zůstává stejná pro různé vztažné body téže silové soustavy, ale pro různé silové soustavy I nabývá různých hodnot.

8. Předpokládejme, že pro silovou soustavu π působící na těleso T známe výsledný silový bivektor k bodu B $\Phi_B = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VB}\}$. Určíme, zda existuje takový bod C, aby platilo $\Phi_C = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VC} = \vec{0}\}$. Jestliže tento bod existuje, pak ze statického hlediska soustavu sil můžeme nahradit jedinou silou \vec{F} . Viz obr. 31.

Úlohu můžeme znázornit tímto schématem



Obr. 31

$$\pi = \{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N = \{\vec{F}_V, \vec{M}_V\}_B = \{\vec{F}_V, \vec{0}\}_C \quad (5.15)$$

Z transformačního vztahu pro \vec{M}_V dostáváme $\vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB} - \vec{BC} \times \vec{F}_V = \vec{0}$, tedy $\vec{M}_{VB} = \vec{BC} \times \vec{F}_V$, odtud vyjádříme vztah pro určení bodu C. Protože budeme dále pracovat pouze s momentovou výslednicí k bodu B, budeme psát místo \vec{M}_{VB} pouze \vec{M}_B a M_{Bx} je x-ová souřadnice momentové výslednice k bodu B. Po rozepsání vektorového součinu podle vztahu (4.3) dostaneme pro souřadnice bodu C soustavu algebraických lineárních rovnic

$$\left. \begin{aligned} M_{Bx} &= y_c F_{Vz} - z_c F_{Vy} \\ M_{By} &= z_c F_{Vx} - x_c F_{Vz} \\ M_{Bz} &= x_c F_{Vy} - y_c F_{Vx} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

V souladu se vztahem (4.6) lze soustavu rovnic psát maticově

$$(5.17) \quad \mathbf{F}_V \mathbf{r}_C = \mathbf{m}_B$$

kde matice soustavy \mathbf{F}_V má tvar

$$\mathbf{F}_V = \begin{bmatrix} 0 & F_{Vz} & -F_{Vy} \\ -F_{Vz} & 0 & F_{Vx} \\ F_{Vy} & -F_{Vx} & 0 \end{bmatrix} \quad \det(\mathbf{F}_V) = 0$$

tato matice je singulární, neboť $\det(\mathbf{F}_V)=0$. Z matematiky je známo, že soustava (5.16), jejíž matice je singulární, nemá jednoznačné řešení, ale má nekonečně mnoho řešení, je-li hodnota matice soustavy stejná s hodnotou rozšířené matice soustavy. Matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnotu, když v obou maticích existují nenulové determinanty stejného řádu. Je-li $\det(\mathbf{F}_V)=0$ a má-li mít soustava (5.16) řešení (nekonečně mnoho), pak všechny subdeterminanty rozšířené matice řádu 3 musí být nulové.

Tedy:

$$\begin{vmatrix} M_{Bx} & F_{Vz} & -F_{Vy} \\ M_{By} & 0 & F_{Vx} \\ M_{Bz} & -F_{Vx} & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies F_{Vz}(F_{Vz}M_{Bz} + F_{Vy}M_{By} + F_{Vx}M_{Bx}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & M_{Bx} & -F_{Vy} \\ -F_{Vz} & M_{By} & F_{Vx} \\ F_{Vy} & M_{Bz} & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies F_{Vy}(F_{Vx}M_{Bx} + F_{Vz}M_{Bz} + F_{Vy}M_{By}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & F_{Vz} & M_{Bx} \\ -F_{Vz} & 0 & M_{By} \\ F_{Vy} & -F_{Vx} & M_{Bz} \end{vmatrix} = 0 \implies F_{Vz}(F_{Vy}M_{By} + F_{Vx}M_{Bx} + F_{Vz}M_{Bz}) = 0$$

Z předpokladu $\vec{F} \neq \vec{0}$ vyplývá, že alespoň jedna souřadnice síly F_{Vx} , F_{Vy} , F_{Vz} je různá od nuly. Nutná podmínka existence řešení soustavy (5.16) t.j. existence bodu C má tvar $(F_{Vx}M_{Bx} + F_{Vy}M_{By} + F_{Vz}M_{Bz}) = 0$. Ve vektorovém vyjádření tuto podmínku můžeme zapsat ve tvaru

$$(5.18) \quad \vec{F}_V \neq \vec{0} \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{M}_{VB} = 0$$

Z předchozích vlastností (2 a 7) vyplývá, že \vec{F}_V i $\vec{F}_V \cdot \vec{M}_{VB}$ nezávisí na poloze vztažného bodu. Proto platí:

Je-li podmínka (5.18) splněna k jednomu bodu, je splněna ke každému bodu tělesa.

Je-li podmínka (5.18) splněna, je hodnota matice \mathbf{F}_V a hodnota rozšířené matice stejná a rovna 2, neboť např. pro $F_{Vz} \neq 0$ je subdeterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & F_{Vz} \\ -F_{Vz} & 0 \end{vmatrix} = F_{Vz}^2 \neq 0$$

a také v rozšířené matici soustavy existuje nenulový subdeterminant řádu nejvýše 2. Např. pro $F_{Vz} \neq 0$ a $M_{Bz} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{Vz} & 0 & M_{Bz} \\ -F_{Vz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & M_{Bz} & F_{Vz} & 0 \\ -F_{Vz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & M_{Bz} \\ -F_{Vz} & 0 \end{vmatrix} = F_{Vz}M_{Bz} \neq 0$$

Tedy soustava (5.16) má nekonečně mnoho řešení, které určíme na základě znalosti z matematiky. V soustavě (5.16) nalezneme subdeterminant řádu 2 různý od nuly. Zbývajících neznámou, která se v subdeterminantu nevyskytuje, můžeme libovolně zvolit. Obdržíme tak jednoparametrickou soustavu lineárních rovnic. Zbylé dvě neznámé pro určitou hodnotu parametru určíme např. Cramerovým pravidlem nebo Gaussovou eliminací. Zbývá určit, co je geometrickým místem bodů C pro různé hodnoty parametru (volitelné souřadnice bodu C). Po rozepsání vztahu (5.17)

$$\begin{aligned} M_{Bx} &= 0 + F_{Vz}y_c - F_{Vy}z_c \\ M_{By} &= -F_{Vz}x_c + 0 + F_{Vx}z_c \\ M_{Bz} &= F_{Vy}x_c - F_{Vx}y_c + 0 \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} 0 & F_{Vz} \\ -F_{Vz} & 0 \end{vmatrix} = F_{Vz}^2 \neq 0$$

z_c - parametr - volitelná souřadnice bodu C

$$\begin{aligned} F_{Vz}y_c &= M_{Bz} + F_{Vy}z_c & y_c &= \frac{M_{Bz}}{F_{Vz}} + \frac{F_{Vy}}{F_{Vz}}z_c \\ -F_{Vz}x_c &= M_{By} - F_{Vx}z_c & x_c &= -\frac{M_{By}}{F_{Vz}} + \frac{F_{Vx}}{F_{Vz}}z_c \end{aligned} \quad (5.19)$$

Vztahy (5.19) jsou parametrickým vyjádřením rovnice přímky procházející bodem C, pro jejíž jednotkový vektor platí $\vec{e}_r = \vec{e}_{F_v}$. Na základě odvozených vztahů můžeme vyslovit důležitou větu o silové a momentové výslednici. (Věta 8).

Pro soustavu sil $\pi = \{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N = \{\vec{F}_V, \vec{M}_V\}_B$ působících na těleso platí

a) Jestliže $\vec{F}_V = \vec{0}$ nebo $\vec{F}_V \cdot \vec{M}_{VB} \neq 0$ **neexistuje bod C** tak, aby
 $\Phi_C = \{\vec{F}_V, \vec{0}\}_C$ a tedy $\vec{M}_{VC} = \vec{0}$

b) Jestliže $\vec{F}_V \neq \vec{0} \vee \vec{F}_V \cdot \vec{M}_V = 0$, **pak existuje přímka p**, pro jejíž každý bod C platí $\Phi_C = \{\vec{F}_V, \vec{0}\}_{C \in p}$, je to přímka procházející bodem C, jejíž nositelka má stejný směr jako \vec{F}_V . **Tuto přímku nazýváme osou silové soustavy.**

Určování F_V a M_{VB}

A. Silové soustavy.

1. Zvolíme souřadnicový systém (libovolně, ale pokud možno šikově).
2. Podle charakteru zadání sil soustavy π (odst. 4.2) vyjádříme pro každou sílu souřadnice působíště a síly (x, y, z, F_x, F_y, F_z) . Přitom můžeme použít větu o nezávislosti silové a momentové výslednice na poloze působíšť sil na jejich nositelkách.
3. Určíme $F_{Vx} = \sum F_{ix}$, $F_{Vy} = \sum F_{iy}$, $F_{Vz} = \sum F_{iz}$ a podle potřeby další veličiny odvozené ze souřadnic (F , směrové úhly \vec{F} , atd.).
4. Určíme M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} v souladu s postupem z odst. 4.4 a to odlišně podle toho, zda výpočet realizujeme ručně nebo s využitím výpočetní techniky.
Pak určíme:

$$M_{Vx} = \sum M_{ix}, \quad M_{Vy} = \sum M_{iy}, \quad M_{Vz} = \sum M_{iz}$$

a podle potřeby další odvozené veličiny.

B. Soustavy silového působení.

1. Zvolíme souřadnicový systém
2. Vyjádříme tvary a definiční obory funkcí $\vec{o}(\vec{r})$, $\vec{p}(\vec{r})$, $\vec{q}(\vec{r})$ v souřadnicovém vyjádření $o_x(x, y, z)$, $o_y(x, y, z)$, $o_z(x, y, z), \dots, q_z(x, y, z)$.
3. Podle tvaru funkcí a dostupnosti výpočetní techniky rozhodneme o způsobu integrace (analyticky, numericky některou z dostupných metod).
4. Podle vztahů (5.9 a 5.10) určíme \vec{F}_V a \vec{M}_{VB} .

5.2 Typy silových soustav podle prostorového uspořádání

Ve staticce a později v navazujících předmětech se budeme setkávat s různými silovými soustavami. Jak vyplývá z dalšího výkladu, je pro statiku důležité umět rozlišovat a hodnotit soustavy sil podle vzájemného směru a polohy sil v prostoru - prostorového uspořádání. Jedná se o látku základního významu, proto v tomto odstavci přehledně uvedeme nejběžnější případy. U každého typu silové soustavy uvedeme:

definici

schéma

silovou výslednici

momentovou výslednici k libovolnému bodu B

invariant silové soustavy $I = \vec{M}_B \cdot \vec{F}_V$

výrok o existenci osy silové soustavy

charakteristický bod pokud existuje

výrok o charakteru momentu silové soustavy. (existence \vec{M})

Silová výslednice je vyjádřena pro všechny silové soustavy shodně ve tvaru

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \int_{\Omega} d\vec{F}_i$$

Pro názornost vztahy budeme psát pro silové soustavy. Jak vyplývá z odst. 5.1 pro soustavy silového působení stačí vztahy pro silové soustavy doplnit vztahy pro rozložené silové působení, ve kterých je zaměněna \sum za \int a \vec{F} za $d\vec{F}$.

1. Soustava sil se společným působištěm (obr. 32)

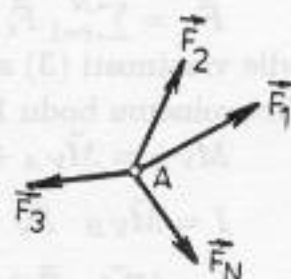
Soustava π je určena $\{A, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{VB} = \sum_{i=1}^N \vec{BA} \times \vec{F}_i = \vec{BA} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{BA} \times \vec{F}_V$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = (\vec{BA} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V = 0$$

$$\rho = (\vec{BA}, \vec{F}_V) \quad \vec{M}_{VB} = (\vec{BA} \times \vec{F}_V) \quad \vec{M}_B \perp \rho \implies \vec{M}_{VB} \perp \vec{F}_V.$$



Obr. 32

Podle věty (8)

osa existuje - prochází bodem A a má rovnici $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{e}_F$

charakteristický bod - společné působiště A

moment $\vec{M} \neq \vec{0}$ neexistuje

2. Soustava sil na společné nositelce (obr. 33)

$A_i \in p$ - kde p je společná nositelka, která má rovnici $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{e}_n$

kde \vec{r}_A je polohový vektor libovolného, ale konkrétně zvoleného bodu přímky p , např. A_1 $\vec{r} = \vec{r}_{A_1} + \lambda \vec{e}_n$

Soustava π je určena

$$\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N = \{A_i, \vec{e}_n, \delta F_i\}_{i=1}^N \quad \text{a} \quad (A_i, F_i) \in p$$

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{e}_n \sum_{i=1}^N \delta F_i = F_V \vec{e}_n$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{VB} &= \sum_{i=1}^N B\vec{A}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N B\vec{A}_i \times \vec{e}_n \delta F_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \delta F_i (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \implies \text{pro } B \in p \text{ je } \vec{M}_{VB} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \delta F_i (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n \delta F_V = 0$$

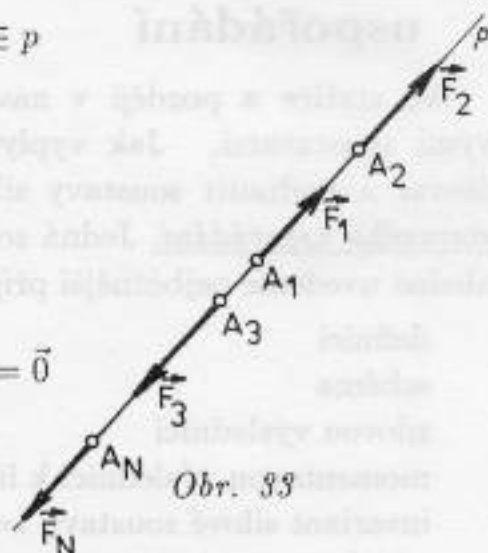
$$\rho = (p, B) = (\vec{e}_n, B) \quad (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \perp \vec{e}_n \implies \text{pro } i = 1, \dots, N \quad (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n = 0$$

Podle věty (8)

osa existuje - prochází bodem A_1 a má rovnici $\vec{r} = \vec{r}_{A_1} + \lambda \vec{e}_F$ - společná nositelka

charakteristický bod - některý z bodů A_i např. A_1

moment $\vec{M} \neq \vec{0}$ neexistuje



Obr. 33

3. Centrální silová soustava (obr. 34)

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ a společným bodem $A \in p_i \quad i = 1, \dots, N$ kde p_i jsou nositelky sil \vec{F}_i .

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \vec{M}_{VA} = \vec{0}$$

podle vlastnosti (3) str.46 vyjádříme momentovou výslednici k libovolnému bodu B pomocí momentu k bodu A.

$$\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VA} + B\vec{A} \times \vec{F}_V = B\vec{A} \times \vec{F}_V \quad \vec{M}_{VA} = \vec{0}$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = (B\vec{A} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V = 0$$

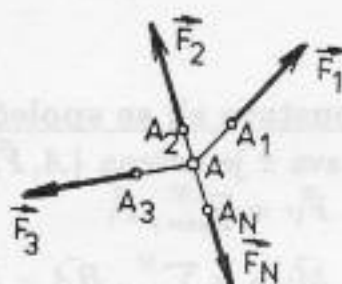
$$\rho = (B\vec{A}, \vec{F}_V) \quad \vec{M}_{VB} \perp \vec{F}_V \implies \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = 0$$

Podle věty (8) platí

osa existuje - přímka procházející bodem A a má rovnici $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda \vec{e}_{F_V}$

charakteristický bod - A průsečík nositelek

moment $\vec{M} \neq \vec{0}$ neexistuje



Obr. 34

4. Soustava sil v jedné rovině (obr. 35)

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ a rovinou ρ , ve které leží nositelky sil \vec{F}_i ,

$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$, $\vec{F}_V \in \rho$ protože $(A_i, \vec{F}_i) \in \rho$ budeme momentovou výslednici vyjadřovat k bodu $B \in \rho$.

$$\vec{M}_{VB} = \sum_{i=1}^N \vec{BA}_i \times \vec{F}_i \quad (\vec{BA}_i \times \vec{F}_i) \perp \rho \implies \vec{M}_{VB} \perp \rho$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = 0$$

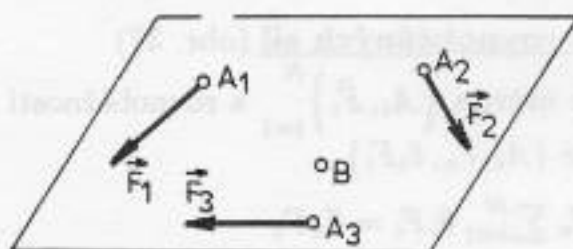
Podle věty (8) platí

pro $\vec{F}_V \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$

osa existuje

charakteristický bod nezavádíme

moment $\vec{M} \neq \vec{0}$ neexistuje



Obr. 35

pro $\vec{F}_V = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$

osa neexistuje

charakteristický bod nezavádíme

existuje \vec{M} a platí $\vec{M}_{VB} = \vec{M}$

pro $\vec{F}_V = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} = \vec{0}$ jedná se o soustavu rovnovážnou viz odst. 5.3.

Pro soustavu sil v jedné rovině platí ve slovní formulaci:

Výslednice silová vždy leží v rovině ρ .

Leží-li bod B v rovině ρ momenty všech sil k bodu B jsou kolmé na ρ a také momentová výslednice \vec{M}_{VB} je kolmá na ρ , pak

je-li $\vec{F}_V \neq \vec{0}$ existuje osa soustavy π

je-li $\vec{F}_V = \vec{0}$ má momentová výslednice charakter volného vektoru

a platí $\vec{M} = \vec{M}_{VB}$.

5. Soustava sil na dvou různoběžných přímkách (obr. 36)

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ různoběžnými přímkami p_1 a p_2 a přiřazením nositelky síly k přímkám p_1, p_2 . Zvolme vhodné očíslování

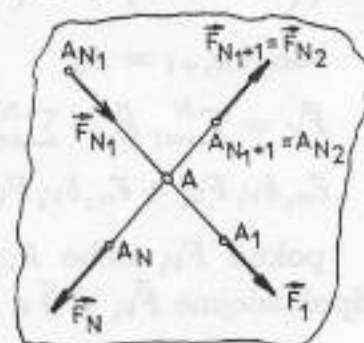
$$\left(\{A_1, \vec{F}_1\}, \dots, \{A_{N_1}, \vec{F}_{N_1}\}\right) \in p_1,$$

$$\left(\{A_{N_2}, \vec{F}_{N_2}\}, \dots, \{A_N, \vec{F}_N\}\right) \in p_2,$$

$$\text{kde } A_{N_2} = A_{N_1+1}, \quad \vec{F}_{N_2} = \vec{F}_{N_1+1}$$

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N_1} \vec{F}_i + \sum_{i=N_2}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{V_1} + \vec{F}_{V_2}$$

$$= \vec{e}_{n_1} \delta_{V_1} F_{V_1} + \vec{e}_{n_2} \delta_{V_2} F_{V_2}$$



Obr. 36

tato soustava je zvláštním případem rovinné centrální soustavy

$$\vec{M}_{VB} = (\vec{M}_{VA} + \vec{BA} \times \vec{F}_V) = \vec{BA} \times \vec{F}_V \quad \vec{M}_{VA} = \vec{0}$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = (\vec{BA} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V = 0$$

$$(\vec{BA} \times \vec{F}_V) \perp \vec{F}_V \implies (\vec{BA} \times \vec{F}_V) \cdot \vec{F}_V = 0$$

Podle věty (8)

osa existuje a je totožná s nositelkou výslednice \vec{F}_V procházející bodem A
 charakteristický bod - A průsečík nositelek
 moment \vec{M} neexistuje

6. Soustava rovnoběžných sil (obr. 37)

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ a rovnoběžností nositelek,
 což vyjádříme $\{A_i, \vec{e}_n, \delta_i F_i\}$

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{e}_n \sum_{i=1}^N \delta_i F_i = \vec{e}_n F_V$$

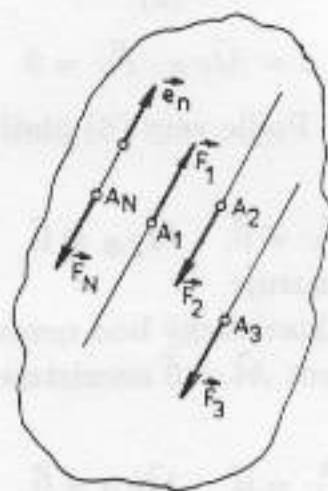
výslednice silová je rovnoběžná s nositelkami sil

$$\vec{M}_{VB} = \sum_{i=1}^N B\vec{A}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n)$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n F_V = 0$$

$$(B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \perp \vec{e}_n \implies (B\vec{A}_i \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n = 0$$

Obr. 37



pro soustavu rovnoběžných sil s daným směrem nezavádíme charakteristický bod
 Podle věty (8)

- a) Je-li $\vec{F}_V = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ osa neexistuje, existuje \vec{M} a platí $\vec{M} = \vec{M}_{VB}$
 b) Je-li $\vec{F}_V \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ osa existuje,
 \vec{M} neexistuje

7. Soustava sil na dvou mimoběžných nositelkách (obr. 38)

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ a mimoběžností přímek p_1, p_2 a přiřazením nositelky síly
 k přímkám p_1, p_2 zvolme vhodné očíslování

$$(\{A_1, \vec{F}_1\}, \dots, \{A_{N_1}, \vec{F}_{N_1}\}) \in p_1$$

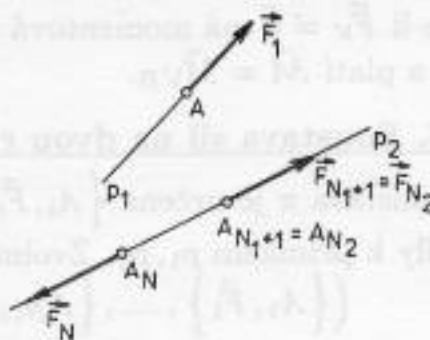
$$(\{A_{N_2}, \vec{F}_{N_2}\}, \dots, \{A_N, \vec{F}_N\}) \in p_2$$

$$\text{kde } A_{N_1+1} = A_2; \quad \vec{F}_{N_1+1} = \vec{F}_{N_2}$$

$$\vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N_1} \vec{F}_i + \sum_{i=N_2}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{V_1} + \vec{F}_{V_2} =$$

$$\vec{e}_{n_1} \delta_{V_1} F_{V_1} + \vec{e}_{n_2} \delta_{V_2} F_{V_2}$$

Obr. 38



pokud F_{V_1} nebo F_{V_2} je nulová, pak soustava má statický charakter případu 2.
 Předpokládejme $\vec{F}_{V_1} \neq \vec{0}$ a $\vec{F}_{V_2} \neq \vec{0} \implies \vec{F}_V \neq \vec{0}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{VB} &= \sum_{i=1}^N B\vec{A}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N_1} B\vec{A}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=N_2}^N B\vec{A}_i \times \vec{F}_i = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} (B\vec{A}_1 + \lambda_i \vec{e}_{n_1}) \times \vec{e}_{n_1} \delta_i F_i + \sum_{i=N_2}^N (B\vec{A}_{N_2} + \lambda_i \vec{e}_{n_2}) \times \vec{e}_{n_2} \delta_i F_i = \\ &= \delta_{V_1} F_{V_1} (B\vec{A}_1 \times \vec{e}_{n_1}) + \delta_{V_2} F_{V_2} (B\vec{A}_{N_2} \times \vec{e}_{n_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = \\
&= \left[\delta_{V_1} F_{V_1} (\vec{B}A_1 \times \vec{e}_{n_1}) + \delta_{V_2} F_{V_2} (\vec{B}A_{N_2} \times \vec{e}_{n_2}) \right] \cdot (\vec{e}_{n_1} \delta_{V_1} F_{V_1} + \vec{e}_{n_2} \delta_{V_2} F_{V_2}) = \\
&= \delta_{V_1} F_{V_1} (\vec{B}A_1 \times \vec{e}_{n_1}) \cdot \vec{e}_{n_1} \delta_{V_1} F_{V_1} + \delta_{V_2} F_{V_2} (\vec{B}A_{N_2} \times \vec{e}_{n_2}) \cdot \vec{e}_{n_2} \delta_{V_2} F_{V_2} \neq 0
\end{aligned}$$

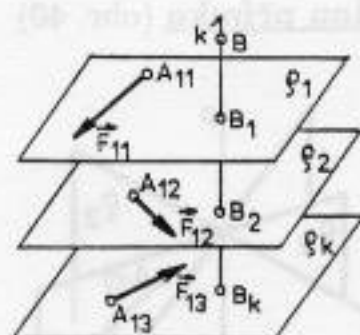
Podle věty (8)

osa neexistuje

charakteristický bod nezavádíme

\vec{M} neexistuje

8. Soustava sil v rovnoběžných rovinách (obr. 39)



Obr. 39

Soustava π je určena $\{A_{ij}, \vec{F}_{ij}\}_{i=1}^{N_j}$ a rovinami ρ_j , které jsou rovnoběžné, kde $\{A_{ij}, \vec{F}_{ij}\}$ značí i -tý silový bivektor v j -té rovině. Z hlediska statiky je soustava popsána soustavou momentových a silových výslednic rovinných soustav sil, vzhledem k bodům ležícím v těchto rovinách. Podle 4, platí $\vec{F}_{V_j} \in \rho_j$ a $\vec{M}_{VB_j} \perp \rho_j$. Vzhledem k tomu, že B_j je libovolný bod ρ_j , zvolme $B_j \in k$ kde k je kolmá na ρ_j pro $j = 1, \dots, k$ (obr. 39)

$$\begin{aligned}
\text{Tedy } \pi &= \cup \pi_j \quad j = 1, \dots, k \\
\vec{F}_V &= \sum_{j=1}^k \vec{F}_{V_j} \quad \vec{F}_{V_j} \in \rho_j \implies \vec{F}_V \text{ je rovnoběžná s } \rho_j
\end{aligned}$$

mohou nastat tři případy

- všechny $\vec{F}_{V_j} = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ - pro každou π_j existuje \vec{M}
- všechny $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ - pro každou π_j existuje osa
- pro některé π_j $\vec{F}_{V_j} = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ a pro zbylé $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ charakteristický bod nezavádíme

$$\text{ad a) } \vec{M}_{VB} = \sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} \quad \vec{M}_{VB_j} \perp \rho_j \quad j = 1, \dots, k \implies \vec{M}_{VB} \perp \rho$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V \quad \vec{M}_{VB} \cdot \vec{0} = 0$$

osa neexistuje

existuje \vec{M} a platí $\vec{M} = \vec{M}_{VB}$

ad b) Může nastat řada zvláštních případů, které je třeba vyšetřovat každý zvlášť. Obecně pro $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$, a $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ (každá soustava π_j má osu) má soustava π charakter soustavy mimoběžných sil.

$$\vec{M}_{VB} = \sum_{j=1}^k \left(\vec{M}_{VB_j} + B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \right) = \sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} + \sum_{j=1}^k \left(B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \right)$$

$$\sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} \perp \rho \quad (B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j}) \parallel \rho_j \quad \sum_{j=1}^k (B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j}) \in \rho$$

$$\rho = (B, \text{rovnoběžná } \rho_j)$$

$$\begin{aligned} I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V &= \left(\sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} + \sum_{j=1}^k B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \right) \cdot \sum_{j=1}^k \vec{F}_{V_j} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^k B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \right) \cdot \sum_{j=1}^k \vec{F}_{V_j} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\sum \vec{M}_{VB_j} \cdot \sum \vec{F}_{V_j} = 0 \quad \vec{M}_{VB_j} \perp \vec{F}_{V_j} \quad j = 1, \dots, k$$

osa neexistuje

\vec{M} neexistuje

ad c) osa neexistuje, protože π obsahuje π_j , pro které $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$ neexistuje $\vec{M} \neq \vec{0}$

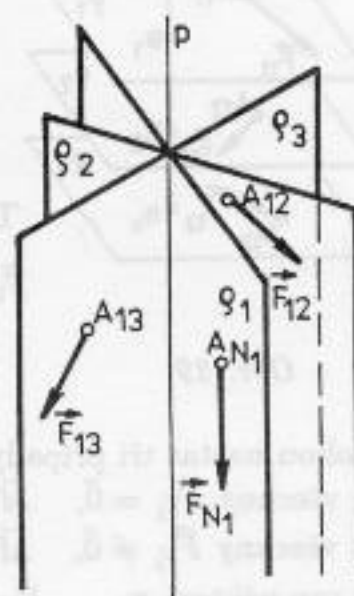
9. Soustava sil v různoběžných rovinách protínajících jednu přímku (obr. 40)

Soustava π je určena $\{A_{ij}, \vec{F}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{i=N, j=k}$ a rovinami ρ_j , které protínají jednu přímku p . Z hlediska statiky je soustava popsána soustavou momentových a silových výslednic, rovinných soustav vzhledem k bodům $B_j \in \rho_j$. Podle 4. $\vec{F}_{V_j} \in \rho_j$ a $\vec{M}_{VB_j} \perp \rho_j$. Vzhledem k tomu, že B_j je libovolný bod ρ_j , zvolme $B_j \in p$.

$$\text{Tedy } \pi = \cup_{j=1}^k \pi_j \quad \vec{F}_V = \sum_{j=1}^k \vec{F}_{V_j}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{VB} &= \sum_{j=1}^k \left(\vec{M}_{VB_j} + B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} + \sum_{j=1}^k B\vec{B}_j \times \vec{F}_{V_j} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{VB_j} \perp \rho_j \quad p \in \rho_j \quad j = 1, \dots, k$$



Obr. 40

Mohou nastat tři případy

a) všechny $\vec{F}_{V_j} = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ - existuje \vec{M} pro každou π_j

b) všechny $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ - existuje osa pro každou π_j

c) pro některé π_j $\vec{F}_{V_j} = \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ a pro zbylé $\vec{F}_{V_j} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB_j} \neq \vec{0}$ charakteristický bod nezavádíme.

$$\text{ad a) } \vec{M}_{VB} = \sum_{j=1}^k \vec{M}_{VB_j} \quad \vec{M}_{VB} \perp p$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V \quad \vec{M}_{VB} \cdot \vec{0} = 0$$

osa neexistuje

existuje \vec{M} a platí $\vec{M} = \vec{M}_{VB}$

ad b) Může nastat řada zvláštních případů, které je třeba vyšetřovat každý zvlášť. Obecně pro $\vec{F}_{Vj} \neq \vec{0}$ a $\vec{M}_{VBj} \neq \vec{0}$ (každá soustava π_j má osu) má soustava π charakter soustavy mimoběžných sil.

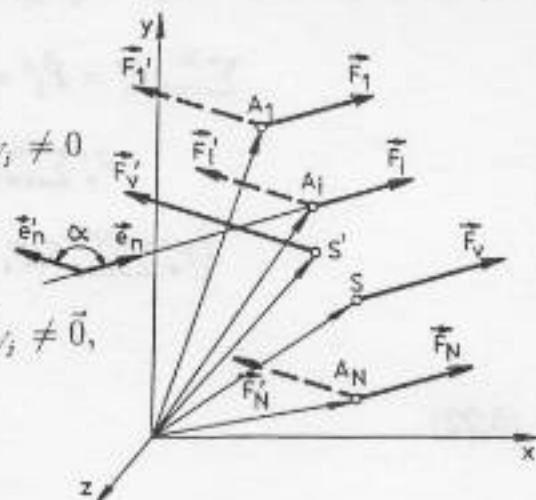
$$\vec{M}_{VB} = \sum_{j=1}^k (\vec{M}_{VBj} + B\vec{B}_j \times \vec{F}_{Vj})$$

$$I = \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = \sum_{j=1}^k (\vec{M}_{VBj} + B\vec{B}_j \times \vec{F}_{Vj}) \cdot \sum_{j=1}^k \vec{F}_{Vj} \neq 0$$

osa neexistuje

\vec{M} neexistuje

ad c) osa neexistuje, protože π obsahuje π_j , pro které $\vec{F}_{Vj} \neq \vec{0}$, neexistuje \vec{M} .



10. Rotující soustava rovnoběžných sil (obr. 41)

Obr. 41

Soustava π je určena $\{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^N$ rovnoběžností nositelek sil a úhlem α mezi \vec{e}_n a \vec{e}'_n , přičemž při změně α se nemění působistě, velikost a orientace sil. Podle 6b soustava rovnoběžných sil π , pro kterou $\vec{F}_V \neq \vec{0}$, $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ má osu. Pro pootočenou soustavu π platí $\vec{F}_V = \vec{F}'_V$ osa existuje. Ukažme, jaké mají osy vzájemný vztah.

$$\begin{aligned} \vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{e}_n \delta_i F_i = \vec{e}_n \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \quad \vec{F}'_V = \vec{e}'_n \sum_{i=1}^N \delta'_i F'_i = \vec{e}'_n \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \quad (5.20) \\ \delta_i F_i = \delta'_i F'_i \quad \vec{r}_i = \vec{r}'_i \end{aligned}$$

Rovnici osy soustavy π vyjádříme vztahem $\vec{r} = \vec{r}_s + \lambda \vec{e}_n$ a rovnici osy soustavy π' vyjádříme vztahem $\vec{r}' = \vec{r}'_s + \lambda \vec{e}'_n$ viz obr. 41

Moment silové výslednice \vec{F}_V soustavy π a \vec{F}'_V soustavy π' k bodu O.

$$\text{Soustava } \pi \quad (\vec{r}_s + \lambda_1 \vec{e}_n) \times \vec{F}_V = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\vec{r}_s + \lambda_1 \vec{e}_n) \times \vec{F}_V = (\vec{r}_s + \lambda_1 \vec{e}_n) \times \vec{e}_n \sum_{i=1}^N \delta_i F_i = \vec{r}_s \times \vec{e}_n \sum_{i=1}^N \delta_i F_i = \vec{r}_s \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \times \vec{e}_n$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \delta_i F_i \vec{e}_n = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i \times \vec{e}_n$$

$$\vec{r}_s \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \times \vec{e}_n = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i \times \vec{e}_n$$

$$\left(\vec{r}_s \sum_{i=1}^N \delta_i F_i - \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i \right) \times \vec{e}_n = \vec{0} \quad \vec{e}_n \neq \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_s \sum_{i=1}^N \delta_i F_i - \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \delta_i F_i}{\sum_{i=1}^N \delta_i F_i} \quad (5.21)$$

soustava π' $(\vec{r}_s' + \lambda_1' \vec{e}_n') \times \vec{F}_V' = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \times \vec{F}_i'$ vzhledem k (5.20)

$$(\vec{r}_s' + \lambda_1' \vec{e}_n') \times \vec{F}_V' = (\vec{r}_s' + \lambda_1' \vec{e}_n') \times \vec{e}_n' \sum_{i=1}^N \delta_i F_i = \vec{r}_s' \times \vec{e}_n' \sum_{i=1}^N \delta_i F_i = \vec{r}_s' \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \times \vec{e}_n'$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \times \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i' \times \vec{e}_n' \delta_i F_i = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i' \times \vec{e}_n'$$

$$\vec{r}_s' \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \times \vec{e}_n' = \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i' \times \vec{e}_n'$$

$$(\vec{r}_s' \sum_{i=1}^N \delta_i F_i - \sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i') \times \vec{e}_n' = \vec{0} \quad \vec{e}_n' \neq \vec{0} \Rightarrow$$

$$(5.22) \quad \vec{r}_s' = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i F_i \vec{r}_i'}{\sum_{i=1}^N \delta_i F_i}$$

Z porovnání vztahů 5.21 a 5.22 vyplývá $\vec{r}_s = \vec{r}_s', s \equiv s'$, tedy osa soustavy π rovnoběžných sil a osa soustavy π' , která vznikne pootočením sil soustavy π o úhel α při zachování působišť, velikostí a orientace sil, se protínají v bodě $s \equiv s'$, který nazýváme středisko soustavy rovnoběžných sil.

5.3 Typy silových soustav podle statických a pohybových charakteristik

V odstavci (5.1) jsme na základě axiomů mechaniky těles ukázali, že ze statického hlediska (což znamená z hlediska pohybové ekvivalence a statické rovnováhy) je silová soustava vyjádřená silovou a momentovou výslednicí v daném bodě tělesa - výsledným silovým bivektorem. Jeho vlastností jsou důležitým kritériem pro klasifikaci silových soustav. Uvažujeme-li silové působení na uvolněné těleso, pak vlastnosti výslednicového bivektoru určují i charakter pohybu tělesa jako celku. Klasifikace, podle vlastností výslednicového bivektoru a odpovídajícího pohybu, patří k jedné ze základních v mechanice těles. Jak vyplývá z odst.(5.1) ze statického hlediska je silová soustava charakterizována:

* silovou výslednicí \vec{F}_V

* momentovou výslednicí \vec{M}_{VB} vzhledem ke zvolenému bodu B

* výrokem o tom, zda platí nebo neplatí relace $\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VC}$, kde C je libovolný bod tělesa. Pravdivostní hodnotu tohoto výroku označme symbolem L_M (logická veličina vyjadřující po kvalitativní stránce vlastnost \vec{M}) a pravdivostní hodnoty přiřadíme takto:

- jestliže pro každý bod $B \neq C$ tělesa platí $\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VC}$ pak $L_M = 1$

- jestliže existuje alespoň jeden bod $C \neq B$ takový, že $\vec{M}_{VC} \neq \vec{M}_{VB}$, pak $L_M = 0$

* **invariantem silové soustavy** - číslem $I = \vec{F}_V \cdot \vec{M}_V$

Uvedené čtyři veličiny $\vec{F}_V, \vec{M}_{VB}, L_M, I$ charakterizují kvalitativně soustavu ze statického hlediska. Souhrnně je proto budeme označovat jako množinu statických charakteristik silové soustavy s označením SC. Tedy

$$SC = \{ \vec{F}_V, \vec{M}_{VB}, L_M, I \}$$

Přehledně jsou silové soustavy podle SC uvedeny v tabulce 5.

Název silové soustavy	Statické charakteristiky F_V M_{VB} L_M I	Pohyb tělesa pokud je možný	Nejjednodušší reprezentant	Schéma
obecná bez osy	$\neq 0$ $\neq 0$ 0 $\neq 0$	posuv a rotace	dvě síly na mimoběžných nositelkách	
obecná s osou	$\neq 0$ $\neq 0$ 0 0	posuv a mož- ná rotace	jedna síla	
točivá	0 $\neq 0$ 1 0	jen rotace	silová dvojice	
staticky rovno- vážná	0 0 1 0	mechanický klid	žádná síla	

Tab. 5

Kromě názvů silových soustav podle různých hodnot $\{ \vec{F}_V, \vec{M}_{VB}, L_M, I \}$ je ještě uveden charakter pohybu a nejjednodušší reprezentant. Tyto údaje vyžadují podrobnější vysvětlení. Posouzení charakteru pohybu tělesa, které je vázáno pouze silovými vazbami, vyžaduje znalosti z kinematiky a dynamiky. V předmětu statika, který tyto předměty předchází, jde jen o základní představu charakteru pohybu bez bližšího zdůvodnění. Základní zákonitosti byly z části probrány ve fyzice a podrobně se k nim vrátíme v dynamice. Charakter pohybu tělesa jako celku v důsledku působení silové soustavy obecné bez osy, točivé a rovnovážné, měl by být na základě dosavadních znalostí studentů pochopitelný. Působí-li na těleso obecná silová soustava s osou a osa silové soustavy neprochází těžištěm, pak nastává posuv a rotace, jestliže osa prochází těžištěm, dochází pouze k posuvu tělesa. Pro statiku toto vysvětlení postačí. Základní význam pro další výklad a hlavně pro představu o charakteru silových soustav má odvození nejjednoduššího reprezentanta, čímž budeme rozumět silovou soustavu se statickými charakteristikami podle tab. 5, ale s minimálním počtem sil. Protože při studiu je třeba vytvořit si představu a pochopit odůvodnění nejjednodušších reprezentantů (nikoliv se je jen naučit), odvození nejjednodušších představitelů podrobně provedeme. K tomu stačí analyzovat silové soustavy od nejjednodušších možných a určit, kdy poprvé nabudou statické charakteristiky požadovaných hodnot.

1. Obecná silová soustava bez osy

Podle tab. 5 je $SC = \{\neq 0, \neq 0, 0, \neq 0\}$

N- počet sil soustavy

N=0 - na těleso nepůsobí žádná síla, tedy $\{\vec{F} = \vec{0}, \vec{M}_{VB} = \vec{0}, L_M, I\}$, což nesouhlasí s požadovanými SC. Proto soustava neobsahující žádnou sílu nemůže mít charakter obecné soustavy bez osy.

N=1 - na těleso působí jedna síla \vec{F} vázaná k bodu A, pak platí $\vec{F} = \vec{F}_V \neq \vec{0}, \vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ pro všechny body kromě bodů nositelky síly \vec{F} . Na nositelce je $\vec{M}_{VB} = \vec{0}$. Tedy existují body, kde $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$ a současně $L_M = 0$. U jedné síly je invariant $I = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{F} = 0$, ale podle definice vyšetřované soustavy musí být $I \neq 0$. Tedy nevyhovuje.

N=2 - na těleso působí dvě síly $\{A_1, \vec{F}_1\}, \{A_2, \vec{F}_2\}$

Pro dvě síly obecně platí

$$\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \vec{M}_{VB} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_1 = (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \vec{M}_{VB} \cdot \vec{F}_V = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \\ &= (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1 + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_2 + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_2 = \\ &= (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1 + (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_2 \end{aligned}$$

Pro dvě síly mohou nastat čtyři případy uspořádání sil:

a) Nositelky sil jsou různoběžné - existuje průsečík nositelek bod B, se kterým ztotožníme vztahný bod. Pak je $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ a tedy

$$I = (\vec{r} \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1 + (\vec{r} \times \vec{F}_1) \cdot \vec{F}_2 = (\vec{r} \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1 - (\vec{r} \times \vec{F}_2) \cdot \vec{F}_1 = 0 - \text{nevyhovuje}$$

b) Nositelky sil jsou rovnoběžné.

Síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 lze vyjádřit takto $\vec{F}_1 = F_{1n} \vec{e}_n, \vec{F}_2 = F_{2n} \vec{e}_n$ pak

$$I = F_{1n} F_{2n} [(\vec{r}_1 \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n + (\vec{r}_2 \times \vec{e}_n) \cdot \vec{e}_n] = 0 - \text{nevyhovuje}$$

c) Síly leží na společné nositelce - zvláštní typ případu b). Platí stejné vztahy pro \vec{F}_1, \vec{F}_2, I - nevyhovuje.

d) Nositelky sil jsou mimoběžné $\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VB_1} + \vec{M}_{VB_2}$ - stačí zvolit bod B na nositelce jedné ze sil, pak je moment k bodu B jedné síly nulový a druhé různý od nuly. Proto existují body, pro které platí $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$. Invariant $I = 0$ pouze pro síly na rovnoběžných nebo různoběžných nositelkách. Pro mimoběžné síly je $I \neq 0$. Požadavky jsou splněny.

Závěr:

Nejjednodušším reprezentantem obecné silové soustavy bez osy je soustava dvou sil na mimoběžných nositelkách.

Někdy se tato soustava označuje jako *silový kříž*.

2. Obecná silová soustava s osou

$$SC = \{\neq 0, \neq 0, 0, 0\}$$

N=0 - obdobně jako v předchozím případě nevyhovuje

N=1 - podle předchozího vymezení SC právě vyhovuje

Závěr:

Nejjednodušším reprezentantem obecné silové soustavy s osou je jedna síla.

3. Točivá silová soustava

$$SC = \{0, \neq 0, 1, 0\}$$

N=0 - nevyhovuje, protože $\vec{M}_{VB} = \vec{0}$, ale má být $\vec{M}_{VB} \neq \vec{0}$.

N=1 - nevyhovuje, protože lze nalézt body C, pro které $\vec{M}_{VB} \neq \vec{M}_{VC}$, tedy $L_M = 0$, ale má být $L_M = 1$

N=2 - Z podmínky $\vec{F}_V = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ obdržíme $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Tato podmínka je splněna, jestliže dvě síly leží na jedné nositelce, nebo jsou nositelky sil rovnoběžné. Moment \vec{M}_{VB} točivé silové soustavy je různý od nuly, odtud obdržíme $\vec{M}_{VB} = B\vec{A}_1 \times \vec{F}_1 + B\vec{A}_2 \times \vec{F}_2 = (B\vec{A}_2 - B\vec{A}_1) \times \vec{F}_2 = A_2\vec{A}_1 \times \vec{F}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow A_1$ nesmí ležet na nositelce síly F_2 .

Závěr:

Nejjednodušším reprezentantem točivé silové soustavy je soustava dvou stejně velkých, opačně orientovaných sil na rovnoběžných nositelkách. Tuto silovou soustavu budeme nazývat silovou dvojicí.

4. Rovnovážná silová soustava

$$SC = \{0, 0, 1, 0\}$$

Z předchozího výkladu je zřejmé, že nejjednodušším reprezentantem soustavy sil působících na těleso, u níž je současně \vec{F}_1 , $\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VC} = \vec{0}$, $L_M = 1$ je silová soustava neobsahující žádnou sílu.

Závěr:

Nejjednodušším reprezentantem staticky rovnovážné silové soustavy působící na těleso je silová soustava neobsahující jedinou sílu.

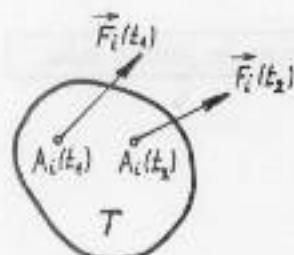
Důležité!!!

1. Znalost statických charakteristik silových soustav patří k základním znalostem v mechanice těles. Chyby v charakteristikách jsou principiálními chybami s odpovídajícími důsledky. ([1], odst. 4.3)
 2. Pokud se ve skriptech mechaniky těles vyskytne název moment bez bližšího vymezení, budeme mít vždy na mysli moment točivé silové soustavy.
 3. Výrok: "Na těleso působí moment", je zkrácené vyjádření výroku: "Na těleso působí silová soustava, která má charakter točivé silové soustavy ($\vec{F}_V = \vec{0}$ a $\vec{M}_{VB} = \vec{M}_{VC} = \vec{M}$)".
- Pozor!! Na těleso NIKDY nepůsobí moment, ale VŽDY silová soustava, jejíž působení ze statického hlediska moment jednoznačně vyjadřuje.

5.4 Typy silových soustav podle odchylek

Až dosud jsme při rozboru silových soustav předpokládali, že silová soustava je určená. V základním tvaru to znamená, že každá síla je určena souřadnicemi silového bivektoru

$$\{A_i, \vec{F}_i\} \equiv (x_i, y_i, z_i, F_i x, F_i y, F_i z)$$



Protože vyšetřované těleso existuje v čase, je i silová soustava časově závislá. Jestliže se tělesem zabýváme v časovém intervalu $\Delta t \in \langle t_v, t_k \rangle$, pak obecně platí

$$(5.23) \quad \text{Obr. 42} \quad \pi(t) = \{A_i(t), \vec{F}_i(t)\}; i = 1, 2, \dots, n(t) \quad t \in \langle t_v, t_k \rangle$$

Zápis vyjadřuje, že se s časem mění poloha působišť, souřadnice sil i jejich počet. Přitom t_v, t_k určují:

t_v - výchozí stav tělesa t.j. stav, kdy těleso začíná být předmětem našeho zájmu - stává se objektem

t_k - konečný stav, kdy zájem o těleso končí.

Časová závislost silové soustavy tedy znamená, že i souřadnice jsou funkcemi času. Časová závislost silové soustavy může mít různý charakter. V navazujících předmětech budeme rozlišovat silové soustavy stálé, periodické cyklické, konzervativní, nekonzervativní atd. V předmětu statika se prozatím omezíme na dva případy:

a) Silová soustava v daném čase t_1 tedy

$$(5.24) \quad \pi(t_1) = \{A_i(t_1), \vec{F}_i(t_1)\}; i = 1, 2, \dots, n(t_1) \quad t_1 \in \Delta t = \langle t_v, t_k \rangle$$

Je to soustava v okamžitém stavu, daném časem t_1

b) Silová soustava stálá, u níž počet sil i souřadnice silových bivektorů jsou nezávislé na čase, tedy

$$(5.25) \quad \pi = \{A_i, \vec{F}_i\}; i = 1, 2, \dots, n \quad t \in \Delta t = \langle t_v, t_k \rangle$$

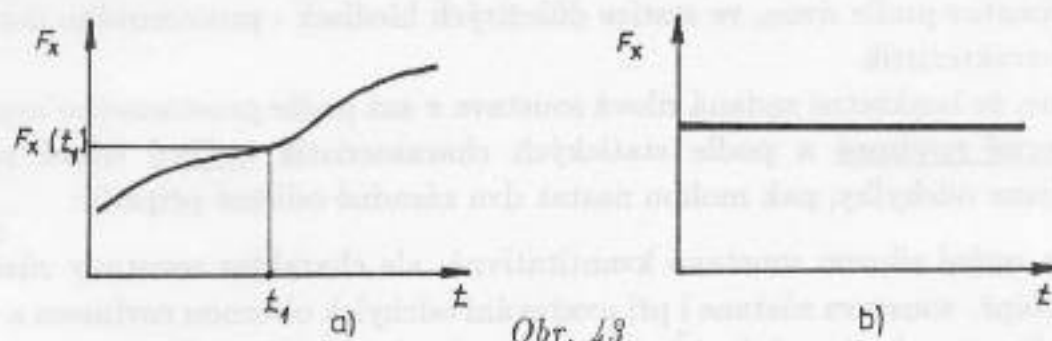
Formálně lze obě tyto silové soustavy vyjádřit v jednotném tvaru

$$(5.26) \quad \pi = \{A_i, \vec{F}_i\}; i = 1, 2, \dots, n$$

nezávisle na tom, zda jde o soustavu okamžitou nebo stálou. Předpokládejme, že je silová soustava π zadána konkrétně. Např. u prvního silového bivektoru je dáno

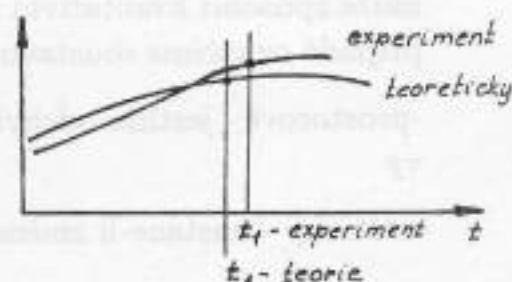
$$(5.27) \quad \vec{r}_1(65; 158; 264)[mm] \quad \vec{F}_1(1, 8; -3, 5; 2, 7)[kN]$$

Rozebereme si, co toto zadání znamená formálně teoreticky a ve smyslu modelování. Formálně teoreticky znamená buď okamžitý stav časově proměnné silové soustavy (obr. 43a)

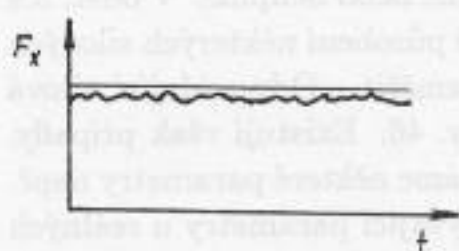


nebo soustavu časově stálou podle obr. 43b. Na tuto formálně teoretickou představu jsou studenti všeobecně zvyklí z předchozího studia. Modelový přístup znamená, že konkrétně zadaná silová soustava se vztahuje k chování reálného tělesa a to ve snaze řešit problém na tomto reálném tělese. Pak ovšem nelze očekávat, že:

a) Okamžitý stav soustavy π určený konkrétními číselnými hodnotami (např. 5.27) se bude shodovat se stavem, který můžeme na reálném tělese zjistit experimentálně viz obr. 44. Můžeme konstatovat rozdíl v čase i v souřadnicích, který může být chybou nebo odchylkou. Jak jsme vysvětlili v [1] rozdíl je chybou, když nastal, ale nastat neměl. Nastal např. nepozorností, neznalostí toho, co se předpokládá atd. Rozdíl je odchylkou, jestliže vzniká jako důsledek toho, že model zahrnuje jen podstatné vlastnosti a proto rozdílnost je v samé podstatě modelování. V tomto odstavci předpokládáme, že jsme chyby zcela záměrně vyloučili. Nemůžeme však vyloučit odchylky. Proto u konkrétního zadání (např. 5.27) si musíme uvědomit, že skutečné hodnoty u tělesa, se budou lišit o odchylky Δ . Číselné hodnoty jsou zadány jednoznačně, ale ve vztahu k realitě takto jednoznačné vůbec nebudou.



b) Časově stálá silová soustava. V realitě neexistují neproměnné jevy. Vše se mění, jen míra těchto změn je různá. Neexistuje proto ani časově stálá silová soustava. Mohou se však vyskytovat soustavy na dané rozlišovací úrovni stálé, tedy takové, že průběh má charakter podle obr. 45. Pak časově stálá silová soustava postihuje charakter průběhu a opět můžeme konstatovat odchylky jako funkce času. Ve fázi řešení problému teoretickým modelováním odchylky neznáme. Podle míry zkušenosti je můžeme s větší či menší pravděpodobností odhadovat. Ve staticce, na počátku studia mechaniky těles, zkušenosti k jejich odhadu nemáme. To však nesmí být důvodem, že o možnosti odchylek neuvažujeme. Právě naopak. Proto si budeme pamatovat a uvědomovat.



Při konkrétním určení veličiny číslem, musíme vždy uvážit možnost odchylek.

Všimněme si nyní odchylek u silových soustav. V předchozích odstavcích jsme uvedli typy silových soustav podle dvou, ve staticce důležitých hledisek - prostorového uspořádání a statických charakteristik.

Předpokládejme, že konkrétně zadaná silová soustava π má podle prostorového uspořádání charakter **obecně rovinné** a podle statických charakteristik **točivé** silové soustavy. Jestliže uvažujeme odchylky, pak mohou nastat dva zásadně odlišné případy:

1. Odchylky změni silovou soustavu kvantitativně, ale charakter soustavy zůstane zachován. Např. soustava zůstane i při uvažování odchylek obecnou rovinnou a točivou, ale odchylkami se bude měnit \bar{M} . V tomto případě označíme silovou soustavu jako stabilní. Znamená to, že odchylky určujících parametrů soustavy nemění charakter silové soustavy.

2. Odchylky změni kvalitu. Např. při uvažování odchylek se z rovinné soustavy může stát prostorová soustava, obecná bez osy. Tedy kvantitativní odchylka souřadnic může způsobit kvalitativní i kvantitativní změnu charakteru silové soustavy. V tomto případě označíme soustavu jako nestabilní a to:

-prostorově - jestliže odchylky měni charakter prostorového uspořádání silové soustavy

-staticky - nastane-li změna statických charakteristik

U úloh s motivací reálného problému, (viz [1] odst. 4.1) konkrétně číselně určených musíme v předmětech mechaniky těles zvažovat možnost a význam odchylek.

U reálných problému musíme význam odchylek vždy posoudit, což neznamená, že nemohou být nepodstatné.

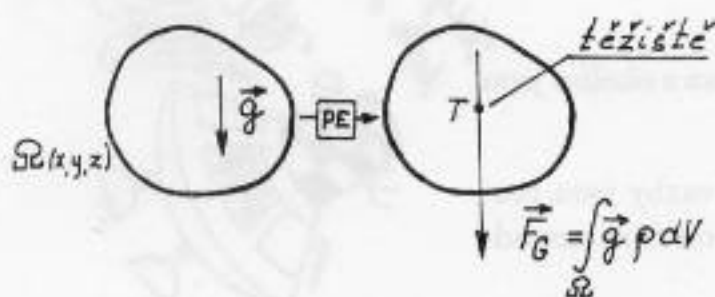
Rozeznáváme stabilitu silové soustavy:

lokální -jestliže odchylky v okolí daného stavu (čase) nezmění charakter soustavy. Jsou to tedy odchylky u okamžité silové soustavy.

globální -jestliže odchylky nezmění charakter silové soustavy v celém časovém intervalu Δt .

5.5 Typy silových soustav podle úplnosti zadání.

Silové soustavy působící na těleso mohou být určeny úplně nebo neúplně. V odst. 3.4 jsme uvedli, že na základě znalostí fyziky umíme popsat silové působení některých silových vazeb, případně u reálných těles silové působení můžeme změřit. Odpovídající silová působení, síly jsou určeny úplně např. gravitační síla viz obr. 46. Existují však případy, kdy víme pouze o existenci silového působení síly, případně známe některé parametry např. působíště, nositelku ap., ale neznáme parametry všechny. Zbývající parametry u reálných těles můžeme určit měřením.



Obr. 46

Působení soustavy sil π_1 na těleso T je pohybově ekvivalentní s působením soustavy π_2 jestliže platí:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 = \sum_{j=1}^M \vec{F}_j \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^N \vec{M}_{Bi} = \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2 = \sum_{j=1}^M \vec{M}_{Bj} \quad (5.28)$$

Těleso T je ve statické rovnováze tehdy a jen tehdy, je-li v mechanickém klidu, který je z hlediska silového působení popsán vztahy:

$$\sum_{i=1}^N \{A_i, \vec{F}_i\} = \left\{ B, \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}, \sum_{i=1}^N \vec{M}_{Bi} = \vec{0} \right\} = \left\{ B, \vec{F}_V = \vec{0}, \vec{M}_{VB} = \vec{0} \right\} \quad (5.29)$$

Z uvedených vztahů s využitím znalostí z matematiky je zřejmé, že ze znalosti pohybového stavu můžeme určit neznámé souřadnice silového bivektoru.

$$\{\vec{r}, \vec{F}\} = \{(x, y, z); (F_x, F_y, F_z)\}$$

Víme-li, že silová soustava π_1 , která je úplně určená, je pohybově ekvivalentní s neúplně určenou silovou soustavou π_2 , pak některé neurčené souřadnice můžeme vypočítat z podmínky ekvivalence (5.28) v souřadnicovém tvaru. Případně, je-li těleso T vázané stykovými vazbami nepohyblivě a působí-li na těleso úplně určená soustava π , pak po uvolnění stykových vazeb obdržíme neúplně určenou soustavu výsledných stykových sil π_R . Je-li uložení tělesa nepohyblivé, staticky určité (nepohyblivé - mechanický klid - statická rovnováha), pak neznámé parametry soustavy výsledných stykových sil můžeme určit z podmínek statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru (5.29).

Tímto jsme obecně popsali základní úlohy statiky. Cílem popisu bylo ukázat význam znalostí charakteru silových soustav působících na těleso (statická ekvivalence) a pohybového stavu tělesa (statická rovnováha). Určením pohyblivosti tělesa a soustav těles, na jejímž základě rozhodneme, zda těleso je či není v mechanickém klidu - statické rovnováze stejně jako stykem těles a uvolněním jednotlivých vazeb se budeme detailně zabývat v kapitole 7. Nyní pouze uvedeme uvolnění základních vazeb v rovině, abychom získali představu o charakteru neúplně určené soustavy výsledných stykových sil a detailně se mohli zabývat statickými podmínkami.

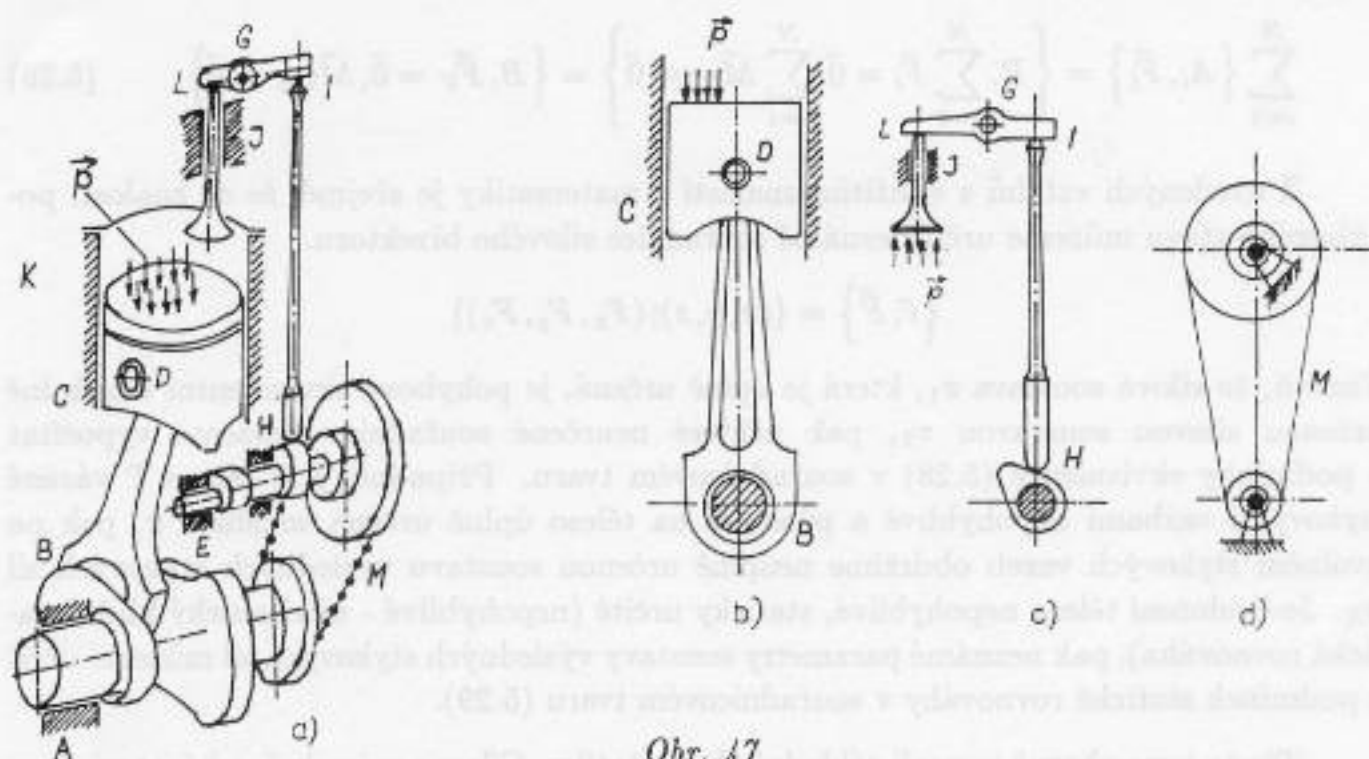
Uvolněné těleso

V odst.(3.4) jsme tělesa podle charakteru uložení rozdělili na:

- Těleso volné - mechanické vazby tělesa s okolím jsou nerozlišitelné.
- Těleso s nepodstatnými vazbami - vazby jsou rozlišitelné, ale z hlediska řešeného problému nepodstatné.
- Těleso vázané - těleso je s okolím vázáno buď silovými nebo stykovými, případně silovými i stykovými vazbami, které jsou z hlediska řešeného problému podstatné.



Z hlediska kategorizace těles je zřejmé, že případy a) a b) jsou ve strojírenství velmi málo pravděpodobné a zcela dominantní jsou vázaná tělesa a soustavy těles. Část typické mechanické soustavy je znázorněna na obr. 47a. Jedná se o klikový a rozvodový mechanismus spalovacího motoru, který byl oddělen od zbytku motoru. Na obrázku jsou některé vazby označeny velkými písmeny. Kromě vazby K jsou všechny vazby stykové. Vazba K je silovou vazbou. Jedná se o vícenásobnou vazbu pracovního prostředí ve válci s pístem, válcem, ventilem a víkem.



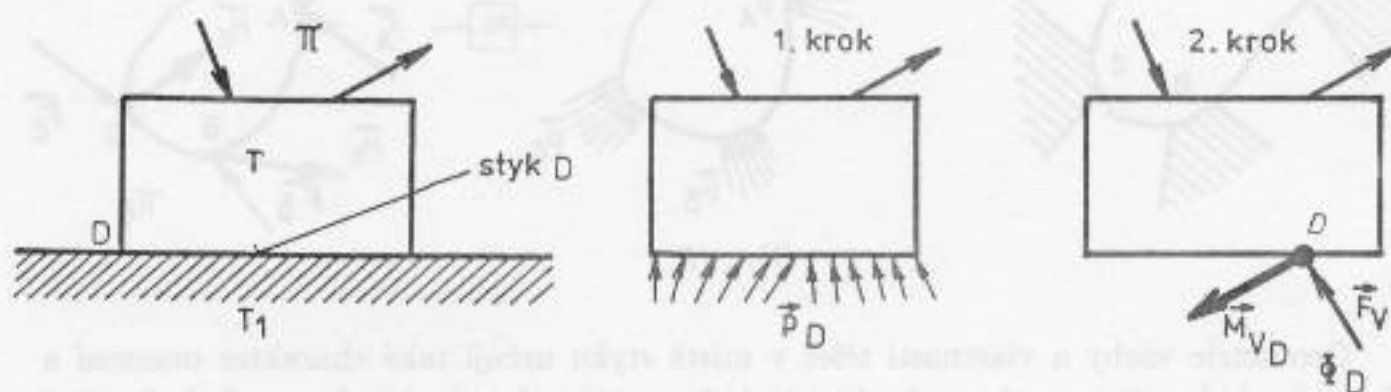
Obr. 47

Na obrázku 47 máme silovou vazbu mezi pracovním prostředím a pístem resp. pracovním prostředím a ventilem uvolněnou. Uvolnění jsme provedli na základě znalostí z fyziky, které nám umožnili určit směr, smysl a charakter silového působení. Hodnota velikosti p závisí na pracovním prostředí ve válci, kterým se zabývá teorie spalovacích motorů a proto bývá odborníky uvedeného oboru určena. Ve většině praktických případů máme zadáno přímo silové působení \vec{p} .

Předpokládejme, že z hlediska řešeného problému můžeme soustavu rozložit na tři rovinné podsoustavy viz obr. 47, na kterých si můžeme ukázat základní vazby v rovině.

A, B, D, E, G	– rotační ,
C, J	– posuvná ,
H, I, L	– podpora ,
M	– řetěz, který má vlastností vazby lanem .

Vzhledem k tomu, že vazby stykem pohyb tělesa omezují a ovlivňují, dochází ve funkčních stykových vazbách k silovému působení. K jeho vyšetření je nutné vazby uvolnit, t.j. nahradit styk tělesa s okolím silovým působením při zachování funkce tělesa. Základní vlastností tělesa je jeho **neprostupnost a deformovatelnost**, proto stykovým útvarem funkční vazby je vždy rovinná oblast s rozloženým silovým působením viz obr. 48.



Obr. 48

Podle odst. 5.1 soustavu rozloženého silového působení ve styku můžeme ze statického hlediska jednoznačně vyjádřit silovou a momentovou výslednicí \vec{F}_D , \vec{M}_{VD} , výsledným silovým bivektorem $\Phi_D = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VD}\}$, kde D je vztažný bod.

Určení rozložených stykových sil, jak později vysvětlíme, je natolik složité, že se jim v základním studiu mechaniky nemůžeme vůbec zabývat. Základní pro všechny předměty mechaniky těles proto není rozložené silové působení ve styku, ale jeho charakteristiky určené ze statického hlediska t.j. výsledný silový bivektor.

Uvolnění vazby si proto představíme ve dvou krocích, jak je znázorněno na obr. 48. V prvním kroku uvolníme těleso s představou rozloženého silového působení ve styku a ve druhém kroku vyjádříme rozložené silové působení výsledným silovým bivektorem $\Phi_D = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VD}\}$. První krok slouží pouze pro představu o charakteru stykových sil. Druhý krok je základem silového přístupu řešení vázaných těles. V konkrétních případech si budeme první krok jen představovat, druhý krok však budeme v průběhu základního studia mechaniky těles vždy graficky znázorňovat.

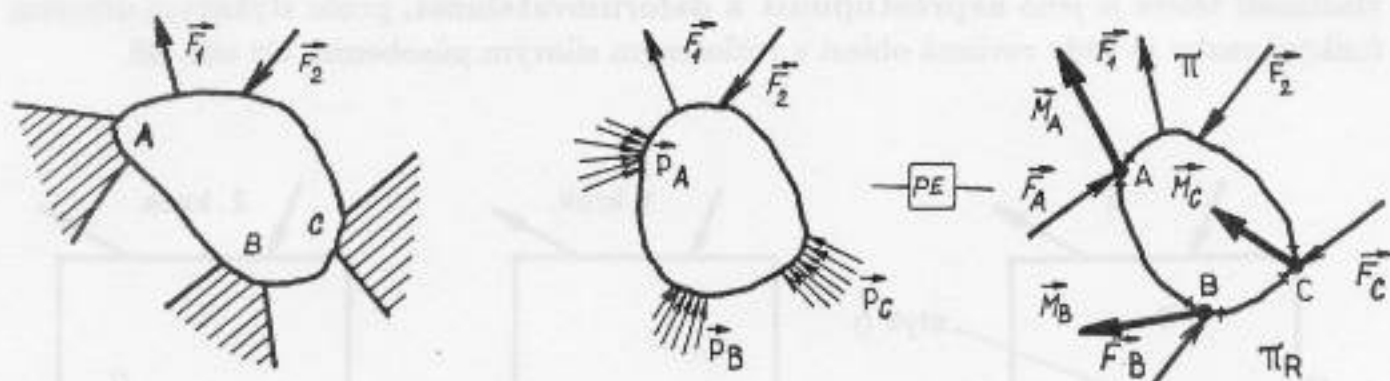
Za uvolněné těleso pak budeme považovat grafické znázornění druhého kroku.

Abychom odlišili bivektor výsledného silového působení ve vazbě stykem od obecného

silového bivektoru, zavedeme označení $\Phi_D = \{\vec{F}_D, \vec{M}_D\}$, kde D je vztažný bod, označení vztažného bodu je totožné s označením vazby. Silový bivektor $\Phi_D = \{\vec{F}_D, \vec{M}_D\}$ je výsledný silový bivektor rozloženého silového působení ve vazbě stykem, vyjadřující silové působení stýkajících se těles v jediném stykovém útvaru.

- \vec{F}_D - výsledná styková síla
- \vec{M}_D - výsledný stykový moment k bodu D.

Jestliže je těleso vázáno více vazbami, pak soustavu rozloženého silového působení při úplném uvolnění tělesa vyjadřuje soustava výsledných stykových bivektorů.



Obr. 49

Geometrie vazby a vlastnosti těles v místě styku určují také charakter omezení a ovlivnění pohybu tělesa vazbou a kvalitativní vlastnosti stykového bivektoru. Pohybovémi a silovými charakteristikami stykových vazeb se budeme podrobně zabývat v odst. 7.2, nyní pouze uvedeme pohybové a silové charakteristiky základních rovinných vazeb, abychom získali názornou představu o charakteru silových soustav působících na uvolněné těleso. Jak již bylo uvedeno mezi základní rovinné vazby patří

- | | | |
|---|---|-------------|
| <ul style="list-style-type: none"> -podpora - H, I, L -posuvná vazba - C, J -rotační vazba - A, B, D, E, G -vazba lanem - M | } | viz obr. 47 |
|---|---|-------------|

U podpory, posuvné vazby a rotační vazby budeme předpokládat, že povrch tělesa v místě styku je "dokonale hladký". Vazba pak pouze omezuje pohyb tělesa v důsledku neprostupnosti těles, ale neovlivňuje pohyb v geometricky možném směru. V zímě při náledí se můžeme (tvrdě) přesvědčit, že existují vazby, kterým uvedený model styku vyhovuje.

Podpora (hladká)

Vazba je charakteristická malým stykovým útvarem, který na strojírenské rozlišovací úrovni reprezentuje bod. Hladká podpora pouze omezuje pohyb těles ve směru společné normály v místě styku, protože neovlivňuje pohyb musí být složka

stykové síly v tečném směru nulová. Uvolnění vazby A je znázorněno na obrázku 50b.

Shrnutí vlastností (hladké) podpory.

Geometrické - stykový útvar je reprezentován bodem A

Pohybové - omezen posuv ve směru společné normály v místě styku - bodě A.

Silové - nositelka výsledné stykové síly je totožná s normálou v bodě A.

$$- \vec{M}_A = \vec{0}$$

- vazba je podmíněně funkční, výsledná styková síla musí směřovat do tělesa

$$- \Phi_A = \{\vec{F}_A, \vec{M}_A = \vec{0}\}$$

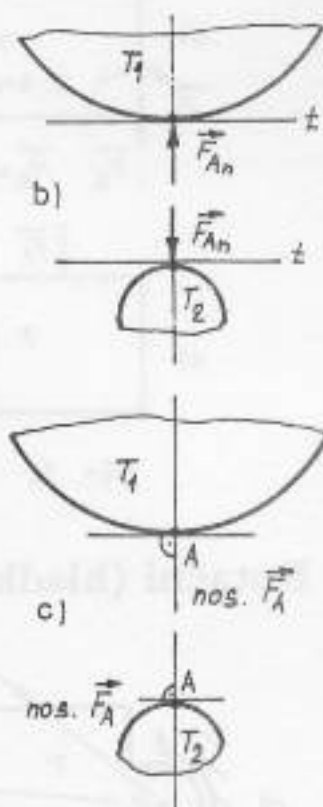
- výsledné silové působení není úplně určeno, neznáme souřadnici \vec{F}_{An}

- Známé parametry pro grafické řešení jsou znázorněny na obr. 50c

- Schématické znázornění vazby:



Obr. 50



Posuvná (hladká) vazba

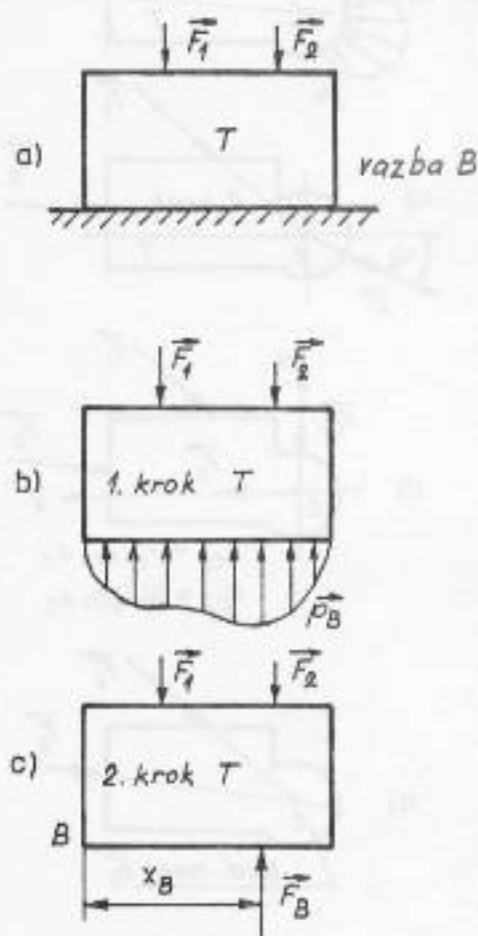
První krok uvolnění vazby je znázorněn na obr. 51b. V důsledku hladkosti styku jsou všechny složky rozloženého silového působení v tečném směru nulové. Na uvolněné těleso působí v místě styku soustava rovnoběžných elementárních sil. Pak podle 5.2 má tato soustava osu - můžeme ji nahradit jedinou silou. Protože neznáme rozložené silové působení nemůžeme z podmínky statické ekvivalence určit polohu a velikost výsledné stykové síly - x_B, F_B - neznáme. Uvolnění na obr. 51b můžeme podle 5.2 nahradit ze statického hlediska $\Phi_B = \{\vec{F}_B, \vec{M}_B\}$, kde B je libovolný, ale konkrétně zvolený bod.

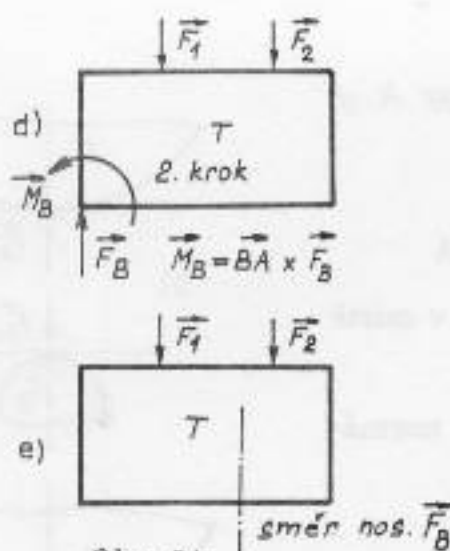
Shrnutí vlastností posuvné (hladké) vazby.

Geometrické - stykovým útvarem je rovinná oblast.

Pohybové - posuvná (hladká) vazba omezuje posuv ve směru normály stykové plochy a otáčení kolem osy kolmé na rovinu tělesa.

Silové - nositelka výsledné stykové síly je totožná



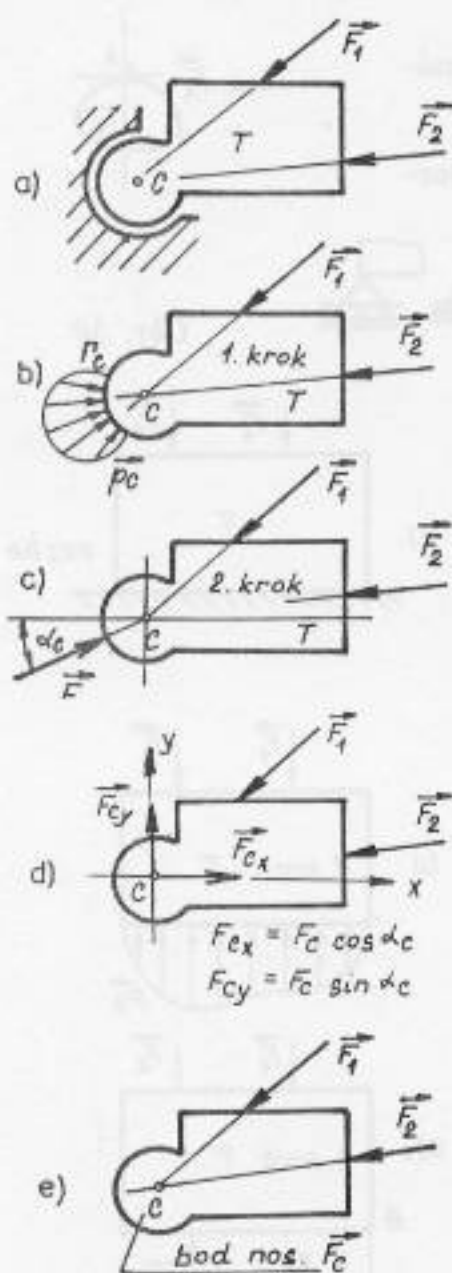


Obr. 51

s normálou stykové plochy.

- vazba je podmíněně funkční, výsledná styková síla u funkční vazby musí směřovat do tělesa a $x \in \langle 0, l \rangle$
- $\Phi_B = \{\vec{F}_B, \vec{M}_B\}$
- výsledné silové působení není úplně určeno, neznáme (x_A, F_{An}) , nebo (F_{An}, M_{An}) . Známým parametrem pro grafické řešení je směr nositelky \vec{F}_B viz obr. 51e.

Rotační (hladká) vazba



Obr. 52

První krok uvolnění je znázorněn na obr. 52b. V důsledku hladkosti styku, má rozložení silového působení v každém bodě kruhového stykového útvaru směr normály, t.j. rozložené silové působení směřuje do bodu C. Na uvolněné těleso působí ve stykovém útvaru Γ_C rovinná centrální soustava sil. Podle odst. 5.2 tato silová soustava má osu, která prochází bodem C. Protože neznáme velikost rozloženého silového působení nemůžeme určit souřadnici a směr nositelky výsledné stykové síly - α_C, F_C . Uvolnění znázorněné na obr. 52c můžeme znázornit v kartézském souřadnicovém systému viz obr. 52d.

Shrnutí vlastností rotační (hladké) vazby.

Geometrické - stykovým útvarem je válcová plocha

Pohybové - rotační (hladká) vazba omezuje posuv v obou směrech

Silové - nositelka výsledné stykové síly prochází bodem C.

- funkčnost vazby závisí na charakteru provedení
- $\Phi_C = \{\vec{F}_C, \vec{M}_C = \vec{0}\}$
- výsledné silové působení není úplně určeno, neznáme (α_C, F_{Cn}) nebo (F_{Cx}, F_{Cy}) . Známé parametry pro grafické řešení jsou znázorněny na obr. 52e.

Schématické znázornění vazby



Vazba lanem

Velmi dobře ohebné lano (např. bavlněné), malého průměru. Plocha stykového útvaru je na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatná, může být reprezentována bodem D. Z každodenní praxe víme, že lano neomezuje ohýbání, omezuje pohyb ve směru osy lana. Odtud je zřejmé, že nositelka výsledné stykové síly musí být totožná s osou lana, tedy $\Phi_D = \{\vec{F}_D, \vec{M}_D = \vec{0}\}$.

Shrnutí vlastností vazby (dokonale ohebným) lanem.

Geometrické - stykový útvar je reprezentován bodem D

Pohybové - omezuje pohyb ve směru osy lana

Silové - nositelka výsledné stykové síly je totožná s osou lana, prochází bodem D

- $\vec{M}_D = \vec{0}$

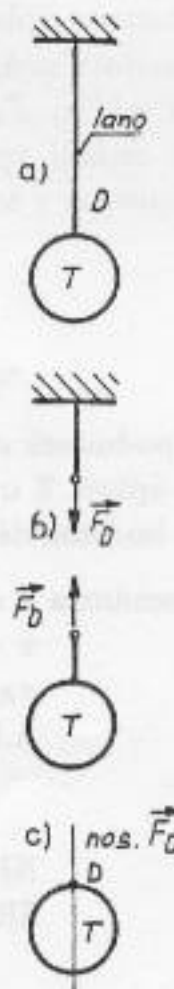
- vazba je podmíněčně funkční, na laně lze auto pouze táhnout

- $\Phi_D = \{\vec{F}_D, \vec{M}_D = \vec{0}\}$

- výsledné silové působení není úplně určeno - neznáme souřadnici F_{Dn} .

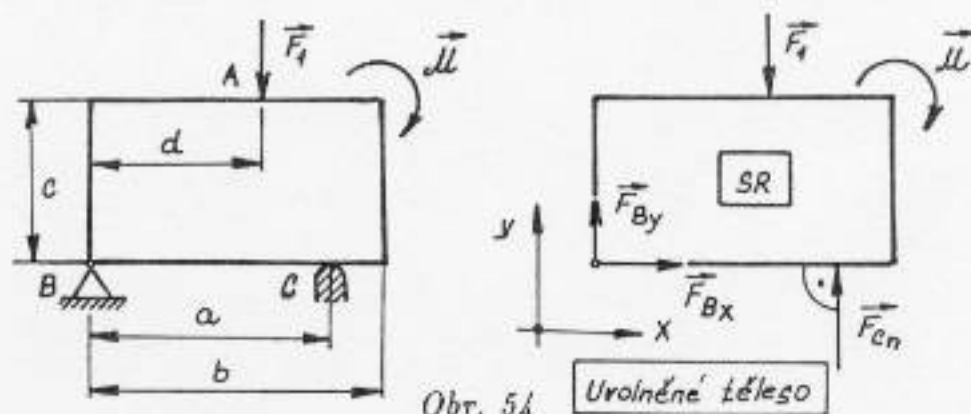
Znamé parametry pro grafické řešení jsou znázorněny na obr. 53c.

Schéma znázornění 



Obr. 53

V odstavci 4.1 jsme obecně popsali základní úlohy statiky. Po vysvětlení uvolnění základních vazeb v rovině a významu uvolňování těles při silovém přístupu řešení úloh mechaniky můžeme přistoupit ke konkrétnímu uvolnění tělesa, jež je znázorněno na obr. 54.



Obr. 54

Na těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{M}\}$. Nechť uložení tělesa je nepohyblivé - je ve statické rovnováze. Po uvolnění vazeb B a C a zajištění

funkce tělesa $\boxed{\text{SR}}$ na uvolněné těleso působí:

Soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}, \vec{M}\}$.

Soustava neúplně určených sil $\pi_R = \{\vec{F}_B, \vec{F}_C\}$ s neznámými parametry

$\text{NP} = \{F_{B_x}, F_{B_y}, F_{C_n}\}$.

Ze zadání vyplývá, že těleso je ve statické rovnováze. Podmínky statické rovnováhy napíšeme v souřadnicovém tvaru.

$$\begin{aligned} F_x : F_{B_x} &= 0 \\ F_y : F_{B_y} - F_1 + F_{C_n} &= 0 \\ M_{zB} : F_{C_n}a - F_1d - \mathcal{M} &= 0 \end{aligned}$$

Z podmínek statické rovnováhy určíme neznámé parametry a tím silové působení na těleso T úplně. Z uvedeného příkladu je zřejmý význam podmínek statické rovnováhy, kterými se budeme dále podrobně zabývat.

Poznámka k značení:

π - soustava úplně zadaných silových prvků.

π_R - soustava neúplně určených silových prvků.

A, B - vazby značíme velkými písmeny latinské abecedy, jestliže pro silové působení po uvolnění vazby zavádíme charakteristický (vztažný) bod, pak tento bod označíme stejným písmenem jako vazbu.

NP - množina neznámých nezávislých parametrů

SR - vyjádření pohybového stavu - statické rovnováhy



Kapitola 6.0

Statické podmínky

6.1 Podmínky statické ekvivalence

V odst. 5.0 jsme vymezili obsah pojmů statická pohybová a statická vazbová ekvivalence, který se týkal silových soustav π_1 a π_2 působících na reálné těleso. Pro těleso a silové soustavy určené abstraktně veličinami jsme vymezili pojem pohybové ekvivalence, jak slovně, tak vztahy, které jsme v dalším výkladu zopakovali.

V kapitole 3. odst. 3.4 jsme vysvětlili, že významnou charakteristikou oborového zaměření mechaniky je podíl silových a stykových vazeb. Pro strojírenství jsou charakteristické vazby stykem, které pohyb tělesa nejen ovlivňují, ale i omezují. Přestože pro strojírenství jsou dominantní vazby stykem, je pro strojírenské soustavy charakteristické, že obsahují tělesa uložená jak nepohyblivě, tak pohyblivě. U pohyblivě uloženého tělesa stykové vazby omezují pouze některou nebo některé složky mechanického pohybu tělesa jako celku. Takto uložená tělesa mohou vykonávat obecný prostorový pohyb, k jehož vyšetření jsou nutné znalosti kinematiky a určení silového působení, které je obecně časově závislé $\pi(t)$, je předmětem dynamiky.

Jestliže v souladu s odst. 5.4 se ve staticce omezíme na vyšetřování silových soustav v daném čase nebo na silové soustavy stálé viz obr. 43, pak jak pro pohybovou ekvivalenci soustav π_1 , π_2 působících na reálné těleso T, tak pro pohybovou ekvivalenci silových soustav zadaných veličinami působících na veličinami určené těleso T i vazbovou ekvivalenci (viz odst. 5.0) zavedeme společné označení statická ekvivalence, pro kterou v souladu s předchozím výkladem platí:

Silové soustavy π_1 a π_2 působící na těleso T jsou staticky ekvivalentní jestliže platí

$$\vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 \quad \wedge \quad \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2$$

kde B je libovolně, ale konkrétně pro obě soustavy shodně zvolený bod.

Podmínku statické ekvivalence můžeme vyjádřit:

Algebraicky:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix}^1 &= \sum F_{ix}^2 \\ \sum F_{iy}^1 &= \sum F_{iy}^2 \\ \sum F_{iz}^1 &= \sum F_{iz}^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{silové} \\ \text{podmínky} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} (\sum M_{ix}^1 &= \sum M_{ix}^2)_D \\ (\sum M_{iy}^1 &= \sum M_{iy}^2)_D \\ (\sum M_{iz}^1 &= \sum M_{iz}^2)_D \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{momentové} \\ \text{podmínky} \end{array} \quad (6.1)$$

Vektorově:

$$\sum \vec{F}_i^1 = \sum \vec{F}_i^2 \quad \wedge \quad \sum \vec{M}_{iD}^1 = \sum \vec{M}_{iD}^2 \quad (6.2)$$

Bivektorově:

$$\sum \Phi_{iD}^1 = \sum \Phi_{iD}^2 \quad (6.3)$$

Maticově:

$$(6.4) \quad \sum \varphi_{iD}^1 = \sum \varphi_{jD}^2$$

$$\text{kde } \varphi_{iD} = \mathbf{S}_D \mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{R}_D \end{bmatrix} \mathbf{f}_i;$$

podmínku (6.4) můžeme také zapsat ve tvaru

$$\sum \mathbf{E} \mathbf{f}_i = \sum \mathbf{E} \mathbf{f}_j \quad \wedge \quad \sum \mathbf{R}_{iD} \mathbf{f}_i = \sum \mathbf{R}_{jD} \mathbf{f}_j$$

Souřadnicový tvar matic \mathbf{R}_D , \mathbf{f} je na str. 33.

Slovně:

Silové soustavy π_1 a π_2 působící na těleso T jsou staticky ekvivalentní, jestliže výsledné bivektory vzhledem k jednomu bodu jsou stejné.

6.2 Podmínky statické rovnováhy tělesa

V odst. 5.0 jsme vymezili pojem rovnováha a statická rovnováha tělesa. Z předchozího výkladu je zřejmé, že statickou rovnováhu tělesa můžeme vyjádřit pohybově a silově, přičemž přívlastek statická charakterizuje časovou neměnnost prvků silových soustav nebo situací v konkrétně určeném časovém okamžiku t_i .

Těleso je ve statické rovnováze tehdy a jen tehdy, je-li v mechanickém klidu, který je z hlediska silového popsán vztahy

$$(6.5) \quad \sum \{A_i, \vec{F}_i\} = \{B, \sum \vec{F}_i = \vec{0}, \vec{M}_{Bi} = \vec{0}\} = \{B, \vec{F}_V = \vec{0}, \vec{M}_{VB} = \vec{0}\}$$

přičemž $\vec{F}_i(t) = \text{konst.}$ nebo $t = t_i$

Jestliže se zabýváme řešením statické rovnováhy vázaného tělesa, pak těleso musíme úplně uvolnit viz obr. 55. Na uvolněné těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků π a soustav neúplně určených výsledných stykových sil π_R .

Tedy

$$(6.6) \quad \pi = \{A_i, \vec{F}_i\}_{i=1}^n = \{\vec{F}_i, \vec{M}_{Di}\}_{i=1}^n = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VD}\}$$

$$(6.7) \quad \pi_R = \{A_j, \vec{F}_j, \dots, x_k, \vec{F}_k, \dots, \vec{F}_r, \vec{M}_{Dr}\} = \{\vec{F}_{Vs}, \vec{M}_{VDs}\}$$

Silové soustavy π a π_R jsme ze statického hlediska nahradili výslednými bivektory

$$(6.8) \quad \Phi = \{\vec{F}_V, \vec{M}_{VD}\} \quad \text{a} \quad \Phi_s = \{\vec{F}_{Vs}, \vec{M}_{VDs}\}$$

kde D je libovolný, ale pro obě soustavy společný, konkrétně zvolený bod.

Splnění podmínky $\boxed{\text{SR}}$ vyžaduje, aby pro silovou soustavu $\pi \cup \pi_R$ platilo:

Vyjádřeno:

Maticově:

$$\sum \varphi_i + \sum \varphi_s = 0 \quad (6.9)$$

Bivektorově:

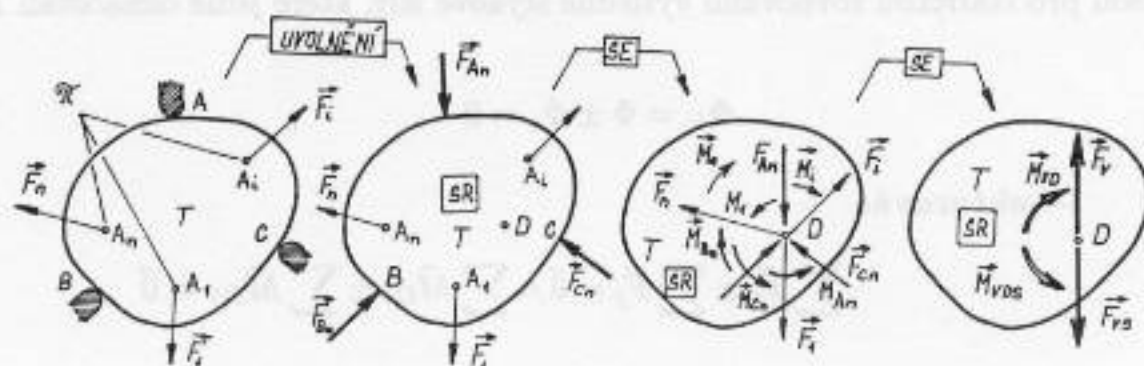
$$\left\{ \sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_s; \quad \sum \vec{M}_{Di} + \sum \vec{M}_{Ds} \right\} = \vec{0} \\ \Phi_V = \Phi + \Phi_s = 0 \quad (6.10)$$

Vektorově:

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_s = \vec{F}_V + \vec{F}_{Vs} = \vec{0} \wedge \sum \vec{M}_{Di} + \sum \vec{M}_{Ds} = \vec{M}_{VD} + \vec{M}_{VDs} = \vec{0} \quad (6.11)$$

Algebraicky:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} + \sum F_{sx} &= 0 \\ \sum F_{iy} + \sum F_{sy} &= 0 \\ \sum F_{iz} + \sum F_{sz} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{silové} \\ \text{podmínky} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} (\sum M_{ix} + \sum M_{sx})_D &= 0 \\ (\sum M_{iy} + \sum M_{sy})_D &= 0 \\ (\sum M_{iz} + \sum M_{sz})_D &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{momentové} \\ \text{podmínky} \end{array}$$



Obr. 55

Srovnáme-li vzájemně podmínky statické ekvivalence a rovnováhy je zřejmé, že je můžeme formálně převést na společný tvar. Převedeme-li pravé strany podmínek statické ekvivalence na stranu levou, pak ve vektorovém vyjádření dostáváme:

$$\sum \vec{F}_i - \sum \vec{F}_j = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{M}_{Di} - \sum \vec{M}_{Dj} = \vec{0} \quad (6.12)$$

Podmínka statické rovnováhy má tvar:

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_s = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{M}_{Di} + \sum \vec{M}_{Ds} = \vec{0} \quad (6.13)$$

Ze srovnání vyplývá, že podmínky se po formální stránce liší pouze znaménkem:

statická ekvivalence —

statická rovnováha +

Vyšetřování vlastností podmínek statické rovnováhy a ekvivalence můžeme provádět společně. Matematický popis obou problémů je v podstatě stejný i když se jedná o různé mechanické problémy. V takových případech říkáme, že jde o problémy analogické. Společné vyjádření zefektivní nejen odvozování vztahů a vlastností, ale umožňuje formulovat i společný počítačový algoritmus, který umožní řešení obou problémů jedním programem. Z uvedených důvodů zformulujeme statický problém, který zahrnuje problém statické rovnováhy a statické ekvivalence. Statické podmínky pak mají následující tvar:

Vyjádřený - maticově:

$$\varphi \pm \varphi_s = 0 \quad (6.14)$$

- bivektorově:

$$\left\{ \sum \vec{F}_i \pm \sum \vec{F}_j; \quad \sum \vec{M}_{Di} \pm \sum \vec{M}_{Dj} \right\} = \vec{0} \quad (6.15)$$

kde \vec{F}_j - jsou pro statickou rovnováhu výsledné stykové síly, které jsme označovali \vec{F}_s

$$\Phi_V = \Phi \pm \Phi_s = 0 \quad (6.16)$$

- vektorově:

$$\sum \vec{F}_i \pm \sum \vec{F}_j = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum \vec{M}_{Di} \pm \sum \vec{M}_{Dj} = \vec{0} \quad (6.17)$$

- algebraicky:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} &= 0 \\ \sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} &= 0 \\ \sum F_{iz} \pm \sum F_{jz} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{silové} \\ \text{podmínky} \end{array} \quad \left. \begin{aligned} (\sum M_{ix} \pm \sum M_{jx})_D &= 0 \\ (\sum M_{iy} \pm \sum M_{jy})_D &= 0 \\ (\sum M_{iz} \pm \sum M_{jz})_D &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{momentové} \\ \text{podmínky} \end{array} \quad (6.18)$$

6.3 Vlastnosti statických podmínek.

1) V odst. 5.1 jsme ukázali, že výslednicový bivektor silové soustavy je nezávislý na poloze působišť sil na jejich nositelkách. Protože statické podmínky můžeme vyjádřit jako součet resp. rozdíl silových a momentových výslednic, jsou statické podmínky

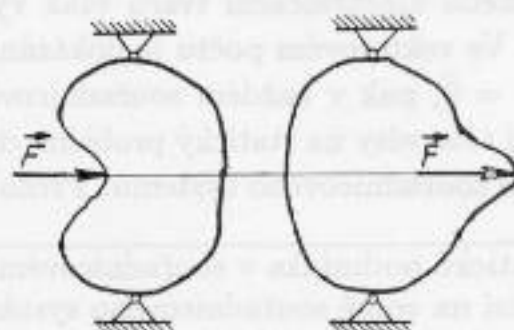
na poloze působišť nezávislé. Z toho vyplývá pro statický problém (statická rovnováha a statická ekvivalence) tato důležitá věta o posouvání síly po její nositelce.

Statický problém (ekvivalence, rovnováhy) je nezávislý na poloze působišť jednotlivých sil na jejich nositelkách.

Jiná formulace:

Při řešení statického problému (ekvivalence, rovnováhy) lze každou sílu libovolně posunout po její nositelce.

Důležité ! Věta o posouvání sil po její nositelce platí pro statický problém, ale neplatí všeobecně pro problémy mechaniky těles. Větu nelze použít při vyšetřování deformace, porušování a jiných jevů, proto formulace - sílu lze libovolně posunovat po její nositelce je nepřípustný. Každý se může snadno přesvědčit, že např. deformace na poloze působišť síly na její nositelce závisí viz obr. 56.



Obr. 56

2) Momentová část statické podmínky je vyjádřena k určitému konkrétně zvolenému vztažnému bodu D. Silová část na tomto bodu nezávisí. S využitím vztahu 5.13 pro vyjádření momentové výslednice k jinému bodu snadno ukážeme, že ani momentová část na vztažném bodu nezávisí. Předpokládejme, že statická podmínka je splněna k bodu B t.j. platí

$$\{\vec{F}_V^1 \pm \vec{F}_V^2; \quad \vec{M}_B^1 \pm \vec{M}_B^2\} = \vec{0}$$

Místo B zvolme nyní za vztažný bod C. Pak podle (5.13)

$$\vec{M}_C^1 \pm \vec{M}_C^2 = \vec{M}_B^1 \pm \vec{M}_B^2 - \vec{BC} \times (\vec{F}_V^1 \pm \vec{F}_V^2)$$

Protože nezávisle na vztažném bodu je

$$\vec{F}_V^1 \pm \vec{F}_V^2 = \vec{0} \quad \text{je} \quad \vec{M}_C^1 \pm \vec{M}_C^2 = \vec{M}_V^1 \pm \vec{M}_V^2$$

Z toho vyplývá věta:

Je-li statická podmínka splněna k jednomu bodu, je splněna ke každému vztažnému bodu.

Vztažný bod pro vyjádření statické podmínky lze proto volit libovolně. Pro inteligentního člověka, a k nim patří i naši studenti, to znamená

volbu efektivní, šikovnou, názornou, výhodnou z hlediska řešení problému. Proto formálně logickou větu o nezávislosti statických podmínek na vztažném bodu můžeme vyjádřit větou:

Statická podmínka nezávisí na vztažném bodu a proto jej volíme účelně s ohledem na další okolnosti řešení problému.

3) Statická podmínka je primárně formulovaná ve vektorovém resp. bivektorovém tvaru, který je nezávislý na volbě souřadnicového systému. Souřadnicové vyjádření v maticovém nebo algebraickém tvaru však vyžaduje, aby souřadnicový systém byl konkrétně zvolen. Ve vektorovém počtu je dokázána tato věta:

Je-li $\vec{a} = \vec{0}$, pak v každém souřadnicovém systému je současně $a_x = 0, a_y = 0, a_z = 0$. Aplikací této věty na statický problém, docházíme k závěru, že statická podmínka nezávisí na volbě souřadnicového systému. Proto platí věta:

Statická podmínka v souřadnicovém tvaru maticově nebo algebraicky vyjádřená nezávisí na volbě souřadnicového systému, proto jej volíme účelně z hlediska řešení problému.

4) Připojme k soustavě sil π rovnovážnou silovou soustavu π_s . Podle odst. 5.3 pro ni platí

$$\vec{F}_{SV} = \vec{0}, \quad \vec{M}_{SB} = \vec{0} \quad (6.19)$$

Statická podmínka pro soustavu $\pi \cup \pi_s$ je

$$\left\{ \vec{F}_V^1 \pm \vec{F}_V^2 + \vec{F}_{SV}, \quad \vec{M}_B^1 \pm \vec{M}_B^2 + \vec{M}_{SB} \right\} = \vec{0} \quad (6.20)$$

vzhledem k 6.19 je

$$\left\{ \vec{F}_V^1 \pm \vec{F}_V^2, \quad \vec{M}_B^1 \pm \vec{M}_B^2 \right\} = \vec{0}$$

což znamená, že soustava π_s statickou podmínku neovlivňuje. Proto platí:

Působení silové soustavy na těleso se z hlediska statického problému (ekvivalence, rovnováhy) nezmění, připojíme-li k soustavě libovolnou rovnovážnou silovou soustavu.

Pozor ! Obdobně jako u vlastnosti první, tato věta platí jen pro statický problém. **Porušování a jiné vlastnosti se změň!**

5) Nezávislost statické podmínky na poloze vztažného bodu a na volbě souřadnicového systému, vede k tomu, že pouze k jednomu vztažnému bodu a jednomu souřadnicovému systému, tvoří statická podmínka soustavu šesti nezávislých algebraických rovnic. Statické podmínky k dalším bodům a souřadnicovým systémům nedávají z hlediska statického problému již nic nového. Vše je zahrnuto v podmínce k jednomu vztažnému bodu a jednomu souřadnicovému systému. Další podmínky jsou proto pro statický problém bezcenné a zbytečné a nemá smysl je psát. Může to vést pouze k chybám a chyby ve statických podmínkách jsou principiální.

Proto platí věta:

Statický problém (ekvivalence, rovnováhy) je úplně popsán statickou podmínkou k jednomu vztažnému bodu a jednomu souřadnicovému systému.

Protože vztažný bod lze libovolně zvolit, bývá vhodné a účelné volit jej jako počátek souřadnicového systému. Tvar statické podmínky k počátku souřadnicového systému označíme jako základní tvar statické podmínky.

Algebraicky je statická podmínka v základním tvaru vyjádřena právě šesti podmínkami k jednomu souřadnicovému systému, které jsou lineárně nezávislé. Jsou to tři podmínky silové a tři momentové. Počet nezávislých podmínek budeme označovat ν . Indexem F resp. M budeme rozlišovat počet statických podmínek silových ν_F resp. momentových ν_M přičemž platí:

$$\nu = \nu_F + \nu_M \quad (6.21)$$

V základním tvaru pro obecnou silovou soustavu je

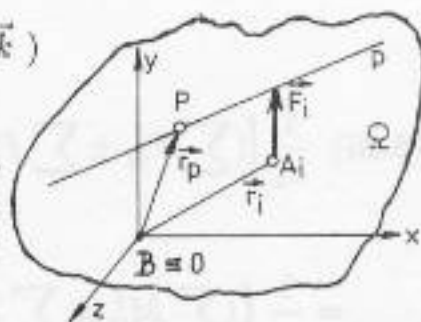
$$\nu = 6, \quad \nu_F = 3, \quad \nu_M = 3$$

6) Zvolme souřadnicový systém v bodě tělesa. K tomuto souřadnicovému systému vyjádříme statickou podmínku v základním tvaru. V obecném případě v algebraickém vyjádření to jsou 3 podmínky silové a 3 momentové k osám x, y, z. Pokud budeme úlohu, která vede na vyjádření statické podmínky řešit s využitím počítače, bude nám vyjádření statické podmínky v základním tvaru vyhovovat vždy. Budeme-li takovou úlohu řešit s využitím malé výpočetní techniky nebo dokonce bez ní, bude rychlost, pracnost, bezchybnost a v mnohých případech i úspěšnost řešení záviset na vhodné strategii řešení. Z předchozích kapitol víme, že tvar momentové podmínky závisí (a pro ruční řešení významně) na volbě vztažného bodu. O volbě souřadnicového systému zpravidla nerozhoduje pouze statická podmínka, proto může být užitečné vyjádření statické podmínky v jiném tvaru než základním. K tomu je nutné znát vztahy mezi různě vyjádřenými statickými podmínkami. Tyto vztahy vyjadřují věty o záměně statických podmínek, které nyní se zdůvodněním uvedeme.

Zvolme souřadnicový systém v bodě B tělesa a osu p, která prochází bodem P a má rovnici

$$\vec{r} = \vec{r}_p + \lambda \vec{e}_n = \vec{r}_p + \lambda (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k})$$

kde, c_x, c_y, c_z jsou směrové kosíny osy p v souřadnicovém systému (O,x,y,z). Nyní si vyjádříme souřadnici F_{p_i} i-té síly, působící na těleso a souřadnici momentu síly \vec{F}_i k bodu P ve směru osy p podle kap. 4.



Obr. 57

$$F_{p_i} = \vec{F}_i \cdot \vec{e}_n = F_{ix} c_x + F_{iy} c_y + F_{iz} c_z \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
M_{p_i} &= (\vec{M}_{iB} + \vec{OP} \times \vec{F}_i) \cdot \vec{e}_n = M_{ix}c_x + M_{iy}c_y + M_{iz}c_z + \begin{vmatrix} x_p & y_p & z_p \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\
&= [M_{ix} + (F_{iz}y_p - F_{iy}z_p)]c_x + [M_{iy} + (F_{ix}z_p - F_{iz}x_p)]c_y + [M_{iz} + (F_{iy}x_p - F_{ix}y_p)]c_z = \\
&= M_{ix}c_x + M_{iy}c_y + M_{iz}c_z + F_{ix}(z_p c_y - y_p c_z) + F_{iy}(x_p c_z - z_p c_x) + F_{iz}(y_p c_x - x_p c_y)
\end{aligned}
\tag{6.23}$$

Na straně 76 jsme vyjádřili statickou podmínku k souřadnicovému systému (O,x,y,z) v algebraickém tvaru

$$\begin{aligned}
\sum F_{ix} \pm \sum F_{jx} &= 0 & (\sum M_{ix} \pm \sum M_{jx})_D &= 0 \\
\sum F_{iy} \pm \sum F_{jy} &= 0 & (\sum M_{iy} \pm \sum M_{jy})_D &= 0 \\
\sum F_{iz} \pm \sum F_{jz} &= 0 & (\sum M_{iz} \pm \sum M_{jz})_D &= 0
\end{aligned}$$

Nyní si položíme otázku, zda existuje jednoznačný vztah mezi splněním statické podmínky k osám x, y, z a k ose p.

a) Nechť je splněna statická podmínka k osám x, y, z, pak platí

$$\begin{aligned}
F_p &= \sum F_{ip}^1 \pm \sum F_{jp}^2 = \\
(6.24) \quad &(\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2)c_x + (\sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2)c_y + (\sum F_{iz}^1 \pm \sum F_{jz}^2)c_z = 0 \\
M_p &= \sum M_{ip}^1 \pm \sum M_{jp}^2 = (\sum M_{ix}^1 \pm \sum M_{jx}^2)c_x + \\
&+ (\sum M_{iy}^1 \pm \sum M_{jy}^2)c_y + (\sum M_{iz}^1 \pm \sum M_{jz}^2)c_z + (\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2) \\
&[z_p c_y - y_p c_z] + (\sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2)[x_p c_z - z_p c_x] + (\sum F_{iz}^1 \pm \sum F_{jz}^2)[y_p c_x - x_p c_y] = 0
\end{aligned}
\tag{6.25}$$

výrazy v kulatých závorkách jsou podle předpokladu nulové. Tedy, je-li splněna podmínka k osám x, y, z je identicky splněna silová i momentová podmínka k ose p.

b) Nechť je splněna statická podmínka k osám p, x, y, pak platí

$$\begin{aligned}
&(\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2) = \\
(6.26) \quad &\frac{1}{c_z} \left[(\sum F_{ip}^1 \pm \sum F_{jp}^2) - (\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2)c_x - (\sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2)c_y \right] = 0 \\
&\sum M_{ix}^1 \pm \sum M_{jx}^2 = \\
&= \frac{1}{c_z} \left\{ (\sum M_{ip}^1 \pm \sum M_{jp}^2) - (\sum M_{ix}^1 \pm \sum M_{jx}^2)c_x - (\sum M_{iy}^1 \pm \sum M_{jy}^2)c_y - \right. \\
&(\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2)[z_p c_y - y_p c_z] + (\sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2)[x_p c_z - z_p c_x] + \\
(6.27) \quad &\left. + (\sum F_{iz}^1 \pm \sum F_{jz}^2)[y_p c_x - x_p c_y] \right\} = 0
\end{aligned}$$

výrazy v kulatých závorkách jsou podle předpokladu nulové. Uvedené vztahy mají smysl pro $c_z \neq 0$. Podmínka $c_z \neq 0$ znamená, že osa nesmí ležet v rovině (x,y) . Osu p , která leží v rovině (x,y) , označíme za závislou z hlediska záměny statické podmínky k ose s podmínkou k ose p . Všechny osy, které leží v rovině (x,y) , označíme za závislé vzhledem k této záměně. Je zřejmé, že z hlediska záměny osy

x jsou závislé všechny osy, které leží v rovině (y,z)

y jsou závislé všechny osy, které leží v rovině (x,z)

z jsou závislé všechny osy, které leží v rovině (x,y)

Na základě předchozích vztahů můžeme vyslovit tuto větu:

Kteroukoliv ze silových statických podmínek k osám x, y, z lze zaměnit silovou podmínkou k nezávislé ose p .
Kteroukoliv z momentových statických podmínek k osám x, y, z lze zaměnit momentovou podmínkou k nezávislé ose p .

Zvolme nyní dvě různé osy p_1 a p_2 a vyšetřujeme, kdy lze statickou podmínku ke dvěma z os x, y, z zaměnit podmínkami k osám p_1 a p_2 . Podle 6.24 platí

$$\sum F_{ip_1}^1 \pm \sum F_{jp_1}^2 =$$

$$(\sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jz}^2)c_{1x} + (\sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2)c_{1y} + (\sum F_{iz}^1 \pm \sum F_{jz}^2)c_{1z} = 0$$

pro zjednodušení zápisu označme

$$\begin{aligned} \sum F_{ip_1}^1 \pm \sum F_{jp_1}^2 &= F_{p_1} & \sum F_{ix}^1 \pm \sum F_{jx}^2 &= F_x \\ \sum F_{iy}^1 \pm \sum F_{jy}^2 &= F_y & \sum F_{iz}^1 \pm \sum F_{jz}^2 &= F_z \end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned} F_{p_1} &= F_x c_{1x} + F_y c_{1y} + F_z c_{1z} \\ F_{p_2} &= F_x c_{2x} + F_y c_{2y} + F_z c_{2z} \end{aligned} \quad (6.28a)$$

obdobně pro moment síly

$$\begin{aligned} \sum M_{ip_1}^1 \pm \sum M_{jp_1}^2 &= M_{p_1} & \sum M_{ix}^1 \pm \sum M_{jx}^2 &= M_x \\ \sum M_{iy}^1 \pm \sum M_{jy}^2 &= M_y & \sum M_{iz}^1 \pm \sum M_{jz}^2 &= M_z \end{aligned} \quad (6.28b)$$

$$\begin{aligned} M_{p_1} &= M_x c_{1x} + M_y c_{1y} + M_z c_{1z} + \\ &+ F_x [z_p c_{1y} - y_p c_{1z}] + F_y [x_p c_{1z} - z_p c_{1x}] + F_z [y_p c_{1x} - x_p c_{1y}] \\ M_{p_2} &= M_x c_{2x} + M_y c_{2y} + M_z c_{2z} + \\ &+ F_x [z_p c_{2y} - y_p c_{2z}] + F_y [x_p c_{2z} - z_p c_{2x}] + F_z [y_p c_{2x} - x_p c_{2y}] \end{aligned}$$

Vyjádříme-li z 6.24 za předpokladu, že známe F_x, F_{p_1}, F_{p_2} , neznámé F_y a F_z dostaneme

$$(6.29) \quad F_y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} F_{p_1} - F_x c_{1x} & c_{1z} \\ F_{p_2} - F_x c_{2x} & c_{2z} \end{vmatrix} \quad F_z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} c_{1y} & F_{p_1} - F_x c_{1x} \\ c_{2y} & F_{p_2} - F_x c_{2x} \end{vmatrix}$$

kde

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1y} & c_{1z} \\ c_{2y} & c_{2z} \end{vmatrix}$$

Má-li existovat jednoznačný vztah splnění statické podmínky k osám x, y, z a x, p_1, p_2 , musí být $\Delta \neq 0$. Je-li $\Delta = 0$, pak osy p_1, p_2 nazýváme závislé z hlediska záměny statické podmínky k osám y, z se statickou podmínkou k osám p_1, p_2 . Pokud $\Delta \neq 0$ osy p_1, p_2 jsou nezávislé a zaručují jednoznačný vztah mezi splněním podmínky k osám x, y, z a k osám x, p_1, p_2 .

Proto platí:

Každou dvojici silových a momentových podmínek k osám x, y, z lze zaměnit dvojicí silových a momentových podmínek k nezávislým osám p_1, p_2 .

Zcela obdobně dostaneme podmínku pro nezávislost os, chceme-li zaměnit podmínky k osám x, y, z podmínkami p_1, p_2, p_3 ; v tomto případě musí být

$$(6.30) \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{1x} & c_{1y} & c_{1z} \\ c_{2x} & c_{2y} & c_{2z} \\ c_{3x} & c_{3y} & c_{3z} \end{vmatrix} \neq 0$$

proto v tomto případě je podmínka závislosti $\Delta_3 = 0$

Pak platí věta:

Všechny silové nebo momentové podmínky k osám x, y, z lze zaměnit trojicí silových nebo momentových podmínek k nezávislým osám p_1, p_2, p_3 .

Zatím jsme se zabývali záměnou podmínek stejného typu, tedy silové silovými a momentové momentovými. Nyní hledejme, kdy lze zaměňovat typy podmínek. Ze vztahů (6.24), (6.25), a (6.28) vyplývá, že ze splnění silových statických podmínek k osám x, y, z a k ose p neplyne splnění momentových statických podmínek k osám x, y, z a k ose p .

Proto:

Žádnou z momentových podmínek nelze zaměnit podmínkou silovou.

Ze vztahu (6.25) s využitím značení (6.28) obdržíme

$$M_p = M_x c_x + M_y c_y + M_z c_z + F_x [z_p c_y - y_p c_z] + F_y [x_p c_z - z_p c_x] + F_z [y_p c_x - x_p c_y]$$

předpokládejme, že současně platí $M_x = M_y = M_z = 0$, $F_x = F_y = 0$ pak

$$F_z = \frac{M_p}{c_x y_p - c_y x_p} \neq 0$$

Je patrné, že z podmínky $M_p = 0$ plyne jednoznačně $F_z = 0$, když $c_x y_p - c_y x_p \neq 0$ což je podmínka nezávislosti osy p. Závislá pro tento případ je každá osa, pro niž

$x_p, y_p = 0$	– protíná osu z
$c_x, c_y = 0 \quad c_z \Rightarrow 1$	– je totožná s osou z
$c_x = 0, x_p = 0$	– leží v rovině (y,z) a neprochází počátkem
$c_y = 0, y_p = 0$	– leží v rovině (x,z) a neprochází počátkem

Odobně můžeme postupovat při záměně dvou silových podmínek momentovými. Např. při záměně podmínek k osám y a z musí platit

$$\begin{aligned} M_{p_1} - F_z[c_{1y}z_{p_1} - c_{1z}y_{p_1}] &= F_y[c_{1z}x_{p_1} - c_{1x}z_{p_1}] + F_z[c_{1x}y_{p_1} - c_{1y}x_{p_1}] \\ M_{p_2} - F_z[c_{2y}z_{p_2} - c_{2z}y_{p_2}] &= F_y[c_{2z}x_{p_2} - c_{2x}z_{p_2}] + F_z[c_{2x}y_{p_2} - c_{2y}x_{p_2}] \end{aligned}$$

Podmínka nezávislosti je pak

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{1z}x_{p_1} - c_{1x}z_{p_1} & c_{1x}y_{p_1} - c_{1y}x_{p_1} \\ c_{2z}x_{p_2} - c_{2x}z_{p_2} & c_{2x}y_{p_2} - c_{2y}x_{p_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Obdobně bychom sestavili podmínku nezávislosti os p_1, p_2, p_3 při záměně všech 3 silových podmínek.

Platí tedy věta:

Silové podmínky k osám x, y, z lze zaměnit podmínkami momentovými k nezávislým osám.

Souhrnně lze věty o záměně formulovat takto:

Momentové podmínky nelze zaměnit silovými, ostatní záměny jsou možné pro nezávislé osy.

S využitím počtu nezávislých statických podmínek ν lze tuto větu vyjádřit pro obecnou silovou soustavu π relací

$$\nu = 6, \quad \nu_F \leq 3, \quad \nu_M \geq 3, \quad \nu_F + \nu_M = 6$$

Vyjádření vlastností statických podmínek při záměně je, jak vyplývá z předchozího, náročnější logicky i pro představu. Je proto důležité uvědomovat si, proč se s nimi při omezeném rozsahu statiky podrobněji zabýváme. Důvody jsou dva:

První důvod spočívá v tom, že při řešení statických problémů přímým výpočtem se snažíme, aby výpočet byl co nejjednodušší. Toho lze dosáhnout právě vhodnou záměnou podmínek. Je to však za cenu universálnosti a hromadnosti algoritmů. Proto záměna je

přijatelná pouze u jednoduchých úloh, které neřešíme obecnějším počítačovým programem. V počítačovém pojetí je výhodnější základní tvar statických podmínek. Druhým důvodem je hlubší pochopení vlastností statických podmínek, které je důležité při rutinním používání počítačových programů.

6.4 Statické podmínky pro zvláštní silové soustavy

Až dosud jsme předpokládali, že silová soustava π ($\pi = \pi_1 \vee \pi_2$ u ekvivalence, $\pi = \pi_1 \wedge \pi_2$ u rovnováhy) je soustavou obecnou prostorovou. V odst. 5.2 jsme rozebrali některé zvláštní silové soustavy podle prostorového uspořádání. Ukažme, jak se zvláštnost prostorového uspořádání projeví ve statických podmínkách, např. u centrální silové soustavy v rovině. Podle odst. 5.2 pro ni platí, že všechny nositelky sil soustavy π se protínají v jednom bodě. Zvolme nejprve tento společný bod B za vztažný bod. Pak v souladu s odst. 4.4 platí $\vec{M}_{iB} = \vec{0}$ a tedy

$$\sum \vec{F}_{1i} \pm \vec{F}_{2j} = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{0} = \vec{0} \quad \text{k bodu } B$$

Momentová podmínka je splněna identicky v důsledku zadání. Statickou podmínku tohoto typu budeme označovat jako triviální statickou podmínku.

Triviální je každá statická podmínka, která je identicky splněna v důsledku prostorového rozložení silové soustavy π .

Zvolme nyní za vztažný bod $C \neq B$. Pak podle vztahu (5.13) platí

$$\vec{M}_{VC} = \vec{M}_{VB} - \vec{BC} \times \vec{F}_V = \vec{BC} \times \vec{F}_V \quad \vec{M}_{VB} = \vec{0}$$

Statická podmínka má v tomto případě tvar

$$\sum \vec{F}_{1i} \pm \vec{F}_{2j} = \vec{0} \quad \wedge \quad \vec{BC} \times (\sum \vec{F}_{1i} \pm \vec{F}_{2j}) = \vec{0}$$

Je zřejmé, že v tomto případě je momentová podmínka závislá na silové. Jak však víme, závislá podmínka neposkytuje další informace o problému a nelze ji pro řešení problému použít. Proto pro zvláštní silové soustavy musíme ze statických podmínek vypustit všechny, které jsou v důsledku prostorového uspořádání silové soustavy triviální (při zvláštním vztažném bodu a vhodném souřadnicovém systému) nebo jsou lineárně závislé. Zbylé nezávislé statické podmínky obsahují úplnou informaci o statickém problému a lze je k řešení použít. Tyto statické podmínky budeme označovat jako použitelné statické podmínky.

Použitelné statické podmínky jsou právě všechny nezávislé a netriviální statické podmínky.

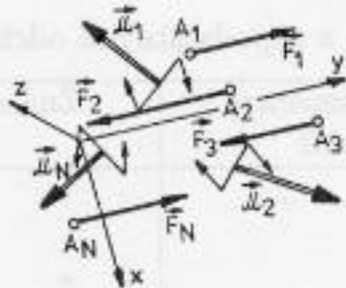
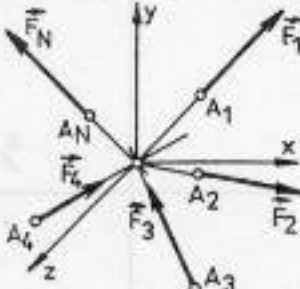
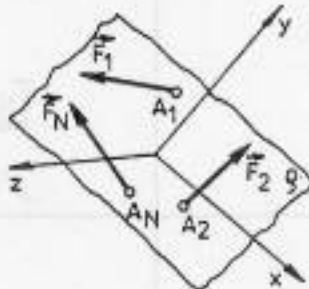
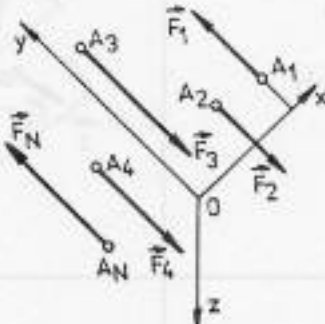
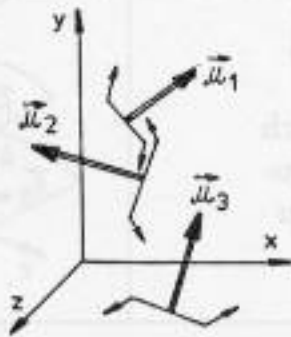
Platí pro ně $\nu \leq 6$. Pokud použitelné podmínky určujeme v obecném souřadnicovém systému, pak jsou to ty, které jsou nezávislé. Jestliže zvolíme souřadnicový systém

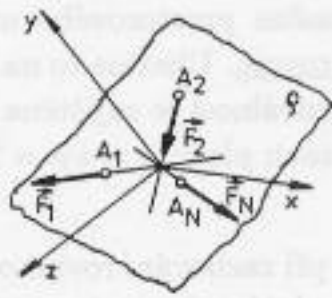
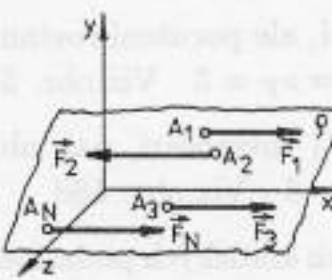
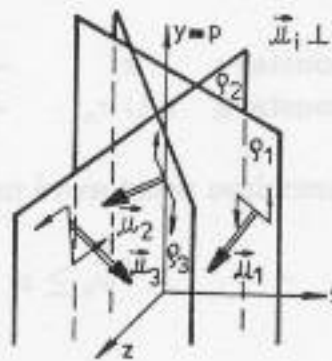
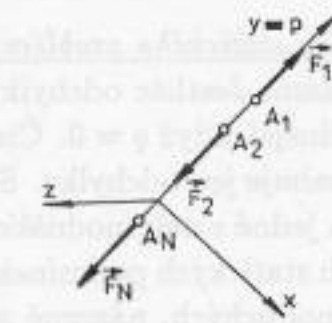
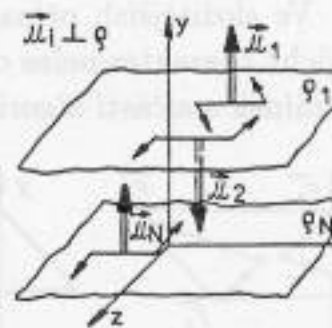
výhodně, pak jsou to podmínky triviální. Druhý postup je názornější. Protože názorná představa je u použitelných statických podmínek zásadní, budeme se snažit používat druhý postup.

A. Soustavy stabilní - s nepodstatnými odchylkami viz odst. 5.4

Charakteristika soustavy silových prvků	Znázornění soustavy	ν_F	ν_M	ν
Obecná prostorová soustava		3	3	6
Prostorová soustava sil které protínají jednu přímku		3	2	5
Prostorová soustava sil, které leží v rovnoběžných rovinách		2	3	5
Prostorová soustava sil, které leží v rovnoběžných rovinách a protínají přímku		2	2	4

Tab.6

Charakteristika soustavy silových prvků	Znázornění soustavy	ν_F	ν_M	ν
Prostorová soustava rovnoběžných sil a obecná soustava dvojic		1	3	4
Centrální prostorová soustava		3	0	3
Obecná rovinná soustava sil		2	1	3
Soustava rovnoběžných sil v prostoru		1	2	3
Obecná soustava dvojic		0	3	3

Charakteristika soustavy silových prvků	Znázornění soustavy	ν_F	ν_M	ν
Centrální rovinná soustava		2	0	2
Soustava rovnoběžných sil v rovině		1	1	2
Soustava silových dvojic v rovinách rovnoběžných s jedinou přímkou		0	2	2
Soustava sil na společné nositelce		1	0	1
Soustava silových dvojic ležících v rovnoběžných rovinách		0	1	1

B. Soustavy nestabilní. Jak jsme ukázali v odst. 5.4 pro nestabilní silové soustavy je charakteristické, že v důsledku odchylek dochází ke kvalitativní změně silové soustavy, kterou může být i změna prostorového uspořádání. Proto odchylky mohou vést k jiné struktuře statických rovnic. Ukažme to na příkladě, viz obr. 58. Je zadána centrální silová soustava v rovině. Centrálnost je zajištěna konstrukčně, ale mohou nastat odchylky. Pro zadanou centrální soustavu platí: $\nu = \nu_F = 2$

Odchylky mohou způsobit:

- Porušení centrálnosti, při zachování rovinnosti. Soustava sil má pak charakter obecné rovinné soustavy sil a platí: $\nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$ Viz obr. 58b.
- Zachování centrálnosti, ale porušení rovinnosti, pak obdržíme prostorovou centrální soustavu sil a platí $\nu = \nu_F = 3$ Viz obr. 58c.
- Porušení centrálnosti i rovinnosti, pak obdržíme obecnou prostorovou soustavu sil a platí: $\nu = \nu_F + \nu_m = 6$ Viz obr. 58d.

Obecně k určení použitelných statických podmínek kromě silové soustavy $\pi(\pi_1 \vee \pi_2, \pi_1 \wedge \pi_2)$ musíme uvažovat ještě soustavu π_o odchylkových sil. Počet použitelných statických podmínek označíme:

ν	pro soustavu	π	– tedy bez odchylek
ν_o	pro soustavu	$\pi \cup \pi_o$	– tedy včetně odchylek

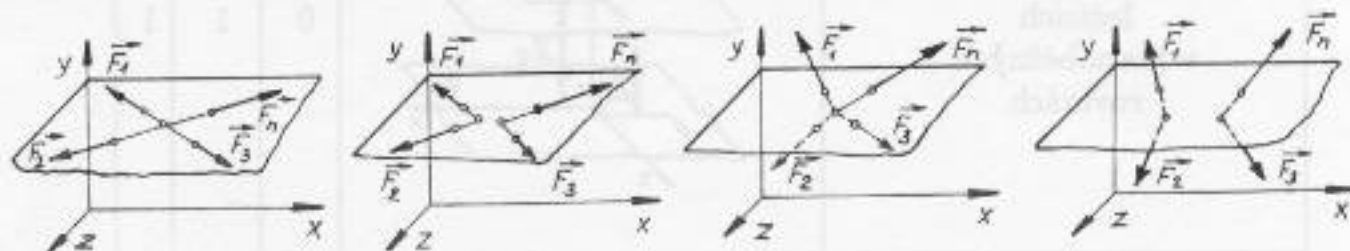
Odchylky všeobecně nemohou prostorové uspořádání zjednodušit. Proto platí

$$\nu_o \geq \nu$$

Rozdíl

$$q = \nu_o - \nu \geq 0$$

charakterizuje míru stability statického problému (ekvivalence, rovnováhy) vzhledem k omezeně možným odchylkám. Jestliže odchylky nejsou omezeny, je $\nu_o = 6$ a $q = 6 - \nu$. Statický problém je nejstabilnější, když $q = 0$. Čím je q větší, tím je problém méně stabilní. $q = \nu_o$, když soustava π obsahuje jen odchylky. Správné určení počtu a typů použitelných statických podmínek patří k jedné z nejjednodušších operací při řešení statických problémů. Určování počtu použitelných statických podmínek z analýzy prostorového uspořádání soustavy sil je možné jen v jednoduchých, názorně zadaných případech. V těchto případech je chyba v určení počtu a typu použitelných statických podmínek **chybou principiální** s odpovídajícími důsledky. Ve složitějších případech, kdy π je prostorovou soustavou s neúplně určenými silami, jejichž charakter nelze dopředu poznat, je určování počtu a typu použitelných statických podmínek součástí algoritmu řešení statického problému.



Obr. 58

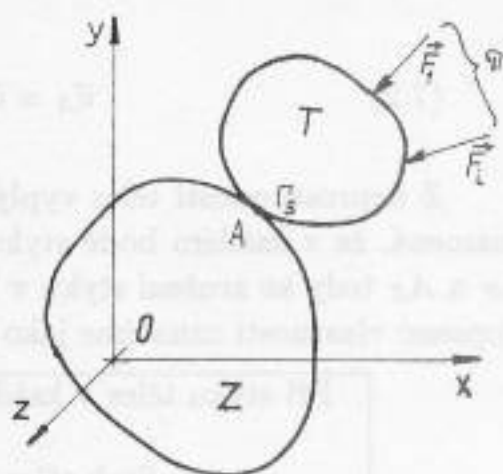
Kapitola 7.0

7.1 Styk těles a geometrie styku

Jak jsme vysvětlili v odst. 3.4 pro strojírenské objekty je charakteristické, že to jsou soustavy těles vázaných stykovými a silovými vazbami. Proto převažujícími úlohami mechaniky těles jsou úlohy vztahující se k vázanému tělesu. Ve staticce především úlohy týkající se určení silových soustav působících na nepohyblivě uložené těleso, případně návrh nepohyblivého staticky určitého uložení tělesa.

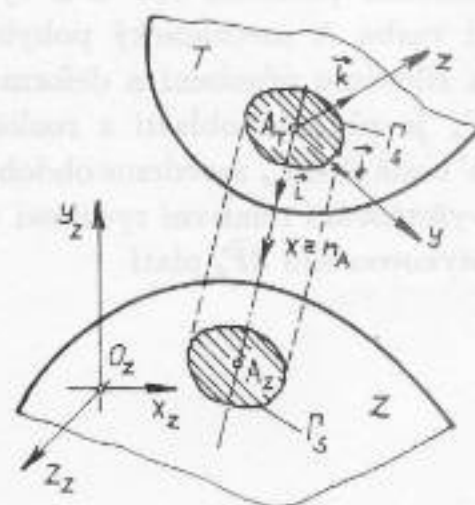
Prvním krokem řešení těchto úloh je správné uvolnění jednotlivých vazeb a tělesa. Proto před konkrétním výkladem o řešení statických úloh rozebereme podrobně styk těles, uvolnění stykových vazeb a stykové síly.

Uvažujme soustavu dvou těles T a Z těchto vlastností viz obr. 59. Těleso Z je základním tělesem ve smyslu vymezení prostoru na strojírenské rozlišovací úrovni. V souladu s axiomem **A1** a odst. 3.0 má tyto vlastnosti - jako celek je nepohyblivé a nezávislé na mechanickém působení okolních těles. Ve strojírenství vlastnosti základního tělesa z hlediska řešení problému má často základ nebo rám stroje, případně těleso s obdobnou funkcí. Těleso Z zaujímá prostorovou oblast Ω_z .



Obr. 59

Těleso T zaujímající prostorovou oblast Ω_T , je ve styku pouze se základním tělesem Z vazbou A . Silové vazby tělesa T s okolím jsou vyjádřeny soustavou sil π . Pohyb tělesa T je omezen pouze vazbou A a ovlivněn vazbou A a silovými vazbami. Styk těles se uskutečňuje ve stykové útvaru $\Gamma_s = \Omega_T \cap \Omega_z$, tedy prostorovém útvaru, který současně zaujímají obě tělesa. Vzhledem k základním vlastnostem tělesa, odst. 3.1, má společná oblast Γ_s jen malou, na strojírenské rozlišovací úrovni nerozlišitelnou tloušťku, jako důsledek neprostupnosti těles. U zatíženého styku je Γ_s vždy plošnou oblastí. Z modelového hlediska může být jednodušší oblastí - část křivky nebo bod.



Obr. 60

Popsané vlastnosti styku označíme jako **1. charakteristiku styku**.

Stykovým útwarem Γ_s při styku těles, je oblast, která není oblastí trojrozměrnou.

Z uvedených vlastností je zřejmý význam relace:

$$A \in \Gamma_s \implies A_T \in \Omega_T \wedge A_Z \in \Omega_Z \wedge A \equiv A_T \equiv A_Z \quad \text{viz obr. 60}$$

V bodě $A \in \Gamma_s$ zvolíme kartézský souřadnicový systém tak, že:

- osa x je totožná s normálou n_A stykového útvaru Γ_s v A , tedy $x \equiv n_A$ a její kladná orientace je ven z tělesa T (říkáme, že x má orientaci vnější normály)

- osy y, z leží v tečné rovině ke Γ_s v bodě A .

Relativní rychlost bodu A vyjádříme jako rozdíl rychlostí bodů tedy

$$(7.1) \quad \vec{v}_A = \vec{v}_{A_T} - \vec{v}_{A_Z}$$

Vzhledem k vlastnostem základního tělesa je $\vec{v}_{A_Z} = \vec{0}$. Odtud můžeme psát

$$(7.2) \quad \vec{v}_A = \vec{v}_{A_T} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = v_n \vec{i} + v_t \vec{t}$$

Z neprostupnosti těles vyplývá, že tělesa T a Z nemohou do sebe prostupovat, což znamená, že v každém bodě styku $v_n \leq 0$. Jestliže $v_n < 0$ pak dochází k oddělení bodů A_T a A_Z tedy ke zrušení styku v bodě A .

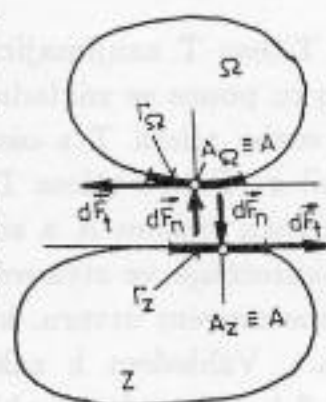
Popsané vlastnosti označíme jako **2. charakteristiku styku**.

Při styku těles v každém bodě $A \in \Gamma_s$, stykového útvaru Γ_s platí

$$v_n = 0$$

Styk těles v bodě A končí, jestliže $v_n < 0$.

Z axiomu o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení **A5 a-d** vyplývá: Ovlivní-li nebo omezí-li vazba A mechanický pohyb tělesa, pak dochází ve vazbě k silovému působení a deformaci tělesa, proto stykový útvar Γ_s je plošnou oblastí s rozloženým silovým působením \vec{p}_s . V bodě $A \in \Gamma_s$ zavedeme obdobně souřadnicový systém jako při vyšetřování relativní rychlosti v bodě A . Pak pro elementární stykovou sílu $d\vec{F}_s$ platí



Obr. 61

$$(7.3) \quad d\vec{F}_s = \vec{p}_s dS = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t = (p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}) dS = (p_n \vec{i} + p_t \vec{t}) dS$$

Soustava elementárních stykových sil $d\vec{F}_s$ pro všechna δ okolí bodů $A \in \Gamma_s$ tvoří silovou soustavu π_s . Podle hodnoty stykového tlaku p_s v bodech $A \in \Gamma_s$ budeme rozeznávat:

a) **nezatížený styk** - styk v bodě A nastal, tedy $A \equiv A_T \equiv A_Z$, ale $p_s = 0$

b) **zatížený styk** - styk v bodě A nastal a $p_s \neq 0$

Podle hodnoty p_s ve stykovém útvaru budeme rozlišovat:

- **stykový útvar nezatížený** - ve všech bodech $A \in \Gamma_s$ stykového útvaru je $p_s = 0$
- **stykový útvar zatížený** - ve všech bodech $A \in \Gamma_s$ stykového útvaru je $p_s \neq 0$
- **stykový útvar smíšený** - na části Γ_s je styk nezatížený, ve zbytku Γ_s je zatížený

Jak jsme již uvedli v důsledku silového působení dochází k deformaci tělesa, proto v případě zatíženého styku se tělesa v okolí stykového útvaru vždy deformují. Stykovým útvarem je plošná - obecná, kulová, válcová nebo rovinná oblast. Konkrétní tvar a rozměry Γ_s jsou závislé na:

- **geometrii a poloze těles v okamžiku styku t_s**
- **zatížení tělesa**
- **deformačních vlastnostech materiálů stýkajících se těles.**

V případě nezatíženého styku ($p_s = 0$) k deformaci tělesa v důsledku styku nedochází a proto stykový útvar Γ_s je určen pouze geometrií a polohou těles v okamžiku styku. Protože povrch tělesa může mít geometricky libovolný tvar, může být stykovým útvarem dvojrozměrná (plošná) nebo jednorozměrná (křivková) oblast, případně bod.

Popsané vlastnosti označíme jako **3. charakteristiku styku**.

Pro stykový útvar Γ_s těles platí:

V nezatíženém styku je Γ_s dána geometrií a polohou těles v okamžiku styku t_s .

V zatíženém styku je Γ_s vždy plošnou oblastí určenou

$\Gamma_s = \Gamma_s(\text{geometrie, poloha v } t_s, \pi \cup \pi_s, \text{ materiál těles})$

Rozborem styku těles ve strojírenství se zjistilo, že změny stykového útvaru Γ_s při styku těles jsou v mnoha případech nepodstatné. Je to především v těch případech, kdy $\Gamma_s(t_s)$ nezatíženého styku je plocha. V řadě případů (např. valivá ložiska) je změna stykového útvaru podstatná. První skupina je jednoduchá v tom, že není třeba uvažovat změny stykové plochy, protože jsou nepodstatné. Proto podle změny stykového útvaru Γ_s můžeme styk těles rozdělit na:

neproměnný - změna stykového útvaru z hlediska řešeného problému je nepodstatná

proměnný - změna stykového útvaru je z hlediska řešeného problému podstatná

Popsané vlastnosti styku označíme jako **4. charakteristiku styku**.

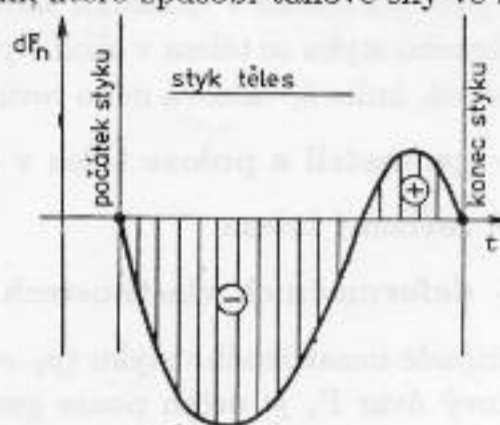
Změna stykového útvaru Γ_s může být v průběhu zatěžování tělesa podstatná nebo nepodstatná z hlediska řešeného problému. Je-li změna stykového útvaru nepodstatná, pak styk nazveme **neproměnným**.

Z uvedeného vyplývá, že řešení podmínek v každém zatíženém nebo smíšeném styku je komplexní problém, který vyžaduje respektování pohybových, silových a deformačních hledisek. Je to problém, který se nazývá kontaktním problémem. Jeho řešení je vedle komplexnosti charakteristické ještě vysokou výpočtovou složitostí. Proto kontaktní problémy patří v mechanice těles

k nejnáročnějším. V základním studiu se jich můžeme dotknout jen v nejjednodušších případech.

Při experimentálním vyšetřování styku reálných těles můžeme zjistit tyto závažné skutečnosti:

- a) Časový průběh elementární stykové síly dF_n od počátku do konce styku má průběh podle obr. 62, který vyjadřuje tuto známou skutečnost. Chceme-li od sebe oddálit dvě tělesa, která byla k sobě přitlačena, musíme vyvinout úsilí, které způsobí tahové síly ve stykové ploše (jsou orientovány ven z tělesa). Tyto tahové síly jsou časově proměnné. Jejich velikost závisí na celé řadě faktorů např. maximální hodnotě tlakové síly, době jejího působení, relativní rychlosti ve styku, kvalitě a charakteru povrchů, materiálu těles atd. Nejen ve strojírenské, ale i v každodenní praxi můžeme z hlediska velikosti tahových sil rozlišit dva typy stykových vazeb:



Obr. 62

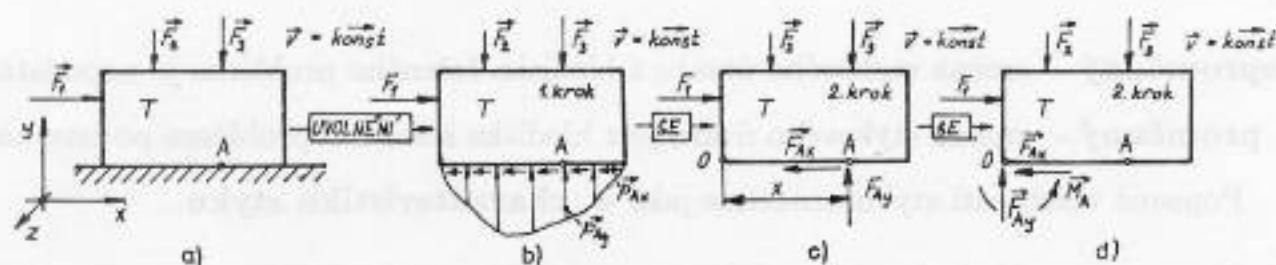
Rozebíratelné - tahová síla při rozpojování styku je malá. Na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatná.

Nerozebíratelné - tahová síla má určitou hodnotu, která je buď funkční nebo může způsobit porušení funkce součásti.

Nejjednodušším stykem z hlediska hodnoty stykových sil je **tlakový styk**, u něhož v průběhu trvání styku jsou podstatné pouze tlakové stykové síly.

Popsané vlastnosti styku označíme jako **5. charakteristiku styku**.

Nejjednodušším stykem z hlediska stykových sil je rozebíratelný tlakový styk, který je charakterizován $p_n \leq 0$ ve všech bodech stykového útvaru Γ_s .



Obr. 63

- b) Geometrie stykového útvaru ovlivňuje kolik a které složky pohybu tělesa jako celku jsou stykovou vazbou omezeny a které složky jsou pouze ovlivněny. Např. u rovinné jednostranné posuvné vazby viz obr. 63 je omezen posuv ve směru osy y a rotace kolem osy z . Posuv ve směru osy x je vazbou A pouze ovlivněn - je geometricky možný.

Z každodenní praxe víme, že posuv ve směru geometricky možného pohybu nastane, působí-li v tomto směru síla $\vec{F}_1 > 0$. Pohyb však nastane, jestliže síla \vec{F}_1 dosáhne jistou hodnotu, která charakterizuje hranici stability klidu. Působením síly $\vec{F}_1 > 0$ pohyb tělesa nastal, má-li pokračovat, \vec{F}_1 musí konat práci. Výkon síly \vec{F}_1 , který vyjádříme vztahem $\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_x > 0$ je z mechanického hlediska mařen ve styku, přeměnou na teplo. Tato změna je nevratná. Práce síly \vec{F}_1 je ve styku přeměněna nevratně na tepelnou energii, která nemůže být aktivní. Souhrnně můžeme tyto vlastnosti styku vyjádřit tvrzením.

Styk těles je klidově stabilní a energeticky nevratně pasivní.

Uvedené tvrzení vyjádřené vztahy označíme jako **5. charakteristiku**.

Má-li v bodě $A \in \Gamma_s$ nastat geometricky možný pohyb ve směru p pak musí platit:

$$|\vec{F}_p| > 0 \text{ a } \vec{F}_p \cdot \vec{v}_p > 0 \quad \vec{F}_p \in \pi$$

$$\vec{F}_p = \sum \vec{F}_{ip} - \text{složky silové soustavy } \pi \text{ ve směru } p.$$

Z uvedeného výkladu je zřejmé, proč vazba stykem pohyb tělesa nejen omezuje, ale i ovlivňuje. Důsledkem ovlivnění a omezení mechanického pohybu vazbou je charakter rozloženého silového působení ve stykovém útvaru Γ_s po uvolnění vazby. Silové působení má nejen složku \vec{p}_{Ay} ve směru normály v místě styku, ale také v složka \vec{p}_{Ax} tečném směru, jako důledek ovlivnění mechanického pohybu vazbou. Viz obr. 63

Nahrazení rozloženého silového působení z hlediska statické ekvivalence výsledným silovým působením ve vazbě je zobrazeno na obr. 63. V praxi při řešení konkrétních problémů můžeme z hlediska stability styku rozlišit dva typy vazeb. Vazby, u kterých je velikost síly \vec{F}_p charakterizující hranici stability klidu malá, případně na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatná a také energetická ztráta je nepodstatná. Existuje celá skupina problémů, kterými se lidé zabývají od nepaměti a jejichž cílem je minimalizace síly \vec{F}_p a energetické ztráty ve vazbě. Mezi tyto problémy patří konstrukce ložisek, konstrukce ozubených kol atd. Cílem je maximální pohyblivost vazby. Vedle těchto vazeb existují vazby, u nichž je z funkčního hlediska požadován klid. Např. brzdy, spojky atd. Z mechanického hlediska uvedené vlastnosti styku budeme nazývat:

Styk neutrální - oblast klidové stability i velikost ztrátové energie jsou natolik malé, že jsou na strojírenské rozlišovací úrovni nepodstatné. Proto pro vazbu s neutrálním stykem platí: Klidový stav geometricky možného pohybu ve směru p nastane, když $\vec{F}_p = 0$ a při pohybu platí $\vec{v}d\vec{F}_s = 0$.

Styk pasivní - klidový stav geometricky možného pohybu ve směru p je možný i když $\vec{F}_p \neq 0$. Pohyb tělesa nastane, jestliže $\vec{F}_p > \vec{F}_h$, kde \vec{F}_h je hraniční síla klidové oblasti. Velikost ztrátové energie je podstatná. K pohybu tělesa je nutné, aby \vec{F}_p konala práci.

Vlastnosti styku těles z hlediska relativního pohybu, stykových sil, energetických poměrů ve styku jsou v současné době předmětem samostatné vědní disciplíny s názvem

tribologie. Je to vědní disciplína, která se dotýká nejrůznějších oborů např. mechaniky, fyziky pevné fáze, hydrodynamiky, termomechaniky, chemie atd. Proto má mezioborový charakter. Není součástí mechaniky těles. Mechanice tribologie poskytuje modely a teorie vyjadřující vztah mezi silovým působením a relativním pohybem ve stykovém útvaru Γ_s . Těchto modelů pro konkrétní problémy existuje v současné době velké množství. Jednotlivé modely se liší rozlišovací úrovní, složitostí použitých algoritmů a rozsahem třídy problémů, pro které je lze použít. V základním studiu se můžeme zabývat jen modely a teoriemi, které mají charakter **nejjednodušších tribologických modelů**.

Shrňme-li dosavadní poznatky o vlastnostech styku z hlediska uvolňování stykových vazeb, pak vidíme, že uvolňování reálných stykových vazeb je problém obtížný a náročný, je však základním problémem při silovém přístupu řešení úloh mechaniky těles, proto jej musíme na odpovídající úrovni zvládnout i ve statice.

Z pedagogického hlediska a časových možností se omezíme na vazby stykem s nejjednoduššími vlastnostmi, které mohou být u řady problémů modelem styku. Jsou to vazby, které označíme **NNTN a NNTP**.

Vazba NNTN je styková vazba, jejíž styk je charakterizován:

N - neprostupností, N - neproměnností, T - tlakovostí, N - neutrálností

Vazba NNTN je vazbou s nejjednodušším modelem styku, jestliže prostupnost, deformace, spojení těles, hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku u skutečného styku jsou natolik malé, že jsou z hlediska řešeného problému nepodstatné.

Vazba NNTP je styková vazba, jejíž styk je charakterizován:

N - neprostupností, N - neproměnností, T - tlakovostí, P - pasivností.

Vazba NNTP je vazbou s nejjednodušším modelem styku, jestliže prostupnost, deformace a spojení těles jsou u skutečného styku nepodstatné, ale hranice klidové stability a ztrátová energie ve styku jsou podstatné.

Z teorie popisujících pasivní vlastnosti styku se budeme zabývat pouze Coulombovským třením a tuhým valením.

Důležitá poznámka:

Všeobecně se vazba NNTN označuje jako vazba bez pasivních odporů a vazba NNTP vazbou s pasivními odpory. Ostatní vlastnosti - neprostupnost, neproměnnost a tlakovost - styku se explicitně neuvádějí, ale intuitivně se uvažují. V současném pojetí vědy a techniky je nutné omezovat intuitivní složky a snažit se o explicitní vyjádření vlastností. To je důvodem zavedení značek NNTN a NNTP, kde jednotlivá písmena explicitně označují úroveň vyjádření vlastností skutečné vazby.

7.2 Silové a kinematické charakteristiky NNTN vazeb.

Z vymezení neprostupnosti, neproměnnosti, tlakovosti a neutrálního styku vyplývá:

1. **Neprostupnost** - složka relativní rychlosti bodu stykového útvaru $A \in \Gamma_s$ ve směru normály v bodě A je nulová $v_n = 0$.
2. **Neproměnnost** - stykový útvar Γ_s je určen geometrií těles a polohou těles na počátku styku. Známe-li geometrii a vzájemnou polohu těles v okamžiku styku je Γ_s určeno.
3. **Tlakovost** - v průběhu trvání styku jsou v každém bodě stykového útvaru podstatné pouze elementární **tlakové síly**. Tedy $\vec{p}_s \leq \vec{0}$, je orientován do tělesa.
4. **Neutrálnost** - klidový stav ve směru geometricky možného pohybu p nastane, jestliže $\vec{F}_p = \vec{0}$. Při pohybu je $\vec{F}_p \vec{v}_p = 0$.

Body 1-4 jsou konkrétním vyjádřením axiomu **A6** pro nejjednodušší možný typ vazby - vazby NNTN. Jsou teoretickým základem uvolňování stykových vazeb, který může být použitelnou teorií pro výpočtové modelování, jestliže odchylky řešeného problému od bodů 1-4 jsou nepodstatné. Ve strojírenství se tyto případy běžně vyskytují, pro ně je vazba NNTN výpočtovým modelem reálné vazby.

Obecně silové působení na stykovém útvaru má charakter rozloženého silového působení, které představuje neohrazený počet neznámých sil $d\vec{F}_s$. Proto i když máme úplně zadané těleso, soustavu π a známe statické chování tělesa, je určení stykových sil úlohou staticky neurčitou, neboť počet neznámých je větší než počet použitelných statických podmínek, kterých může být pro jedno těleso maximálně 6 ($\nu \leq 6$). Neznámé parametry silového působení ve styku můžeme určit ze statických podmínek pouze tehdy, je-li počet neznámých parametrů μ právě roven počtu použitelných statických podmínek $\nu \leq 6$. Je-li tato podmínka splněna, pak říkáme, že úloha je staticky určitá a to je principiálně možné v těchto případech:

1. Těleso je vázáno určitým (malým) počtem NNTN vazeb, kde Γ_s je bod.
2. Těleso je vázáno vazbami NNTN, kde Γ_s je spojitou oblastí. Rozložené silové působení ve styku nahradíme z hlediska statické ekvivalence neúplně určenou silovou a momentovou výslednicí viz obr. 63c, d, které budeme nazývat stykové výslednice.
3. Těleso je vázáno vazbami NNTN, kde Γ_s je spojitá oblast s rozloženým silovým působením \vec{p}_s , které na základě zkušeností s experimentálním a výpočtovým řešením kontaktních problémů aproximujeme funkcí s určitým malým počtem parametrů. Pak cílem statického řešení je určit hodnotu parametrů, a tím i tvar funkce, kterou nazýváme stykovou funkcí. Ve staticce můžeme řešit úlohy jen staticky určité t.z. neznámé parametry silového působení určíme ze statických podmínek. Proto ve staticce můžeme řešit pouze úzkou třídu úloh, týkajících se stykových výslednic a stykových funkcí staticky určité uložených těles. Teprve v dalších předmětech můžeme tuto třídu úloh rozšířit, i když v základním studiu, jak jsme již vysvětlili, se nebudeme zabývat kontaktními problémy.

Proto si budeme uvědomovat:

V základním studiu, jehož je i statika, se omezíme na úlohy o stykových výslednicích a stykových funkcích.

Z výkladu od počátku skript by mělo být zřejmé, že změna mechanického pohybu tělesa a silové působení na těleso tvoří dvě strany jedné mince, protože silové působení je mírou změny mechanického pohybu. Proto styk těles má z mechanického hlediska dvě stránky:

- **kinematickou** - která vystihuje omezení a ovlivnění složek mechanického pohybu stykem
- **silovou** - která popisuje silové působení ve styku

Jestliže pro styk můžeme použít model NNTN styku, pak deformace stykového útvaru v průběhu zatěžování je nepodstatná a pohyb tělesa vzhledem k základnímu nebo jinému tělesu je pak jednoznačně určen translačním pohybem libovolného bodu B a rotačním pohybem kolem bodu B, což na základě znalostí z fyziky můžeme vyjádřit takto:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{CB} \quad (7.4)$$

kde \vec{v}_c - je rychlost libovolného bodu tělesa T.

Pohybový stav tělesa T je tedy určen bivektorem $\{\vec{v}, \vec{\omega}\}_B$, jehož souřadnicový tvar maticově zapíšeme takto:

$$\mathbf{v}_B = [v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T_B \quad (7.5)$$

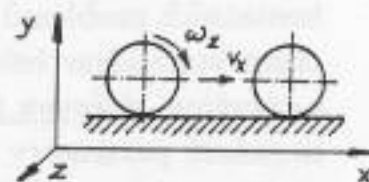
Ve staticce se pohybem zabýváme pouze kvalitativně, proto k matici \mathbf{v}_B přiřadíme logickou matici pohyblivosti \mathbf{k}_v takto: je-li prvek v_i matice \mathbf{v}_B

nezávislý	geometricky možný	$k_i = 0$
nezávislý	geometricky nemožný	$k_i = 1$
	řídící (geometricky možný)	$k_i = 0$
závislý	řízený (geometricky nemožný)	$k_i = 1$

Nyní si vysvětlíme závislost složek pohybu tělesa jako celku. Představme si váleček podle obrázku 64. Složka pohybu $v_y = 0$ není geometricky možná. Složky v_x, ω_z jsou geometricky možné. Pokud se váleček bude odvalovat, pak složky v_x a ω_z jsou lineárně závislé, přičemž závislost můžeme vyjádřit vztahem $v_x = r \cdot \omega_z$. Pohyb válečku můžeme popsat pohybem v rovině (x,y), maticí $\mathbf{v}_s = [v_x, v_y, \omega_z]^T_s$.

Matice pohyblivosti bude mít tvar

$\mathbf{k}_v = [0 \ 1 \ 1]^T$ - jestliže řídící je posuv ve směru x, nebo
 $\mathbf{k}_v = [1 \ 1 \ 0]^T$ - jestliže řídící je rotace kolem osy z.



Obr. 64

Silové působení z hlediska silových výslednic je v souladu s odst. 5.1 a obr. 63 vyjádřeno ve zvoleném bodě B silovým výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{M}_v\}_B$, který

můžeme vyjádřit v souřadnicovém tvaru maticově takto:

$$\varphi_B = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T_B - \text{silový výslednicový bivektor} \quad (7.6)$$

Souřadnice bivektoru φ_B jsou buď neúplně určené nebo jsou nulové v důsledku vlastností vazby NNTN. Z podmínky neutrálnosti styku $F_x v_x = 0$ vyplývá: Je-li pohyb v daném směru (x) geometricky možný ($v_x \neq 0$), pak příslušná souřadnice odpovídající silové nebo momentové výslednici je nulová ($F_x = 0$). Z předchozího výkladu je zřejmé, že pro vazbu NNTN k matici pohyblivosti k_v můžeme přiřadit matici silového působení k_φ takto:

Je-li

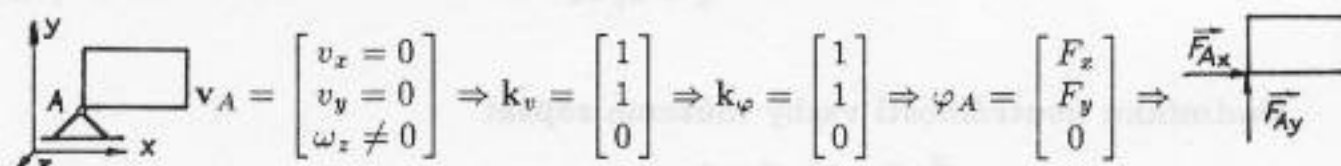
$$k_i = 0 \Rightarrow k_{\varphi_i} = 0 \quad ; \quad k_i = 1 \Rightarrow k_{\varphi_i} = 1$$

k matici k_φ přiřadíme výslednicový silový bivektor podle vztahu

$$k_{\varphi_i} = 0 \Rightarrow \varphi_i = 0 \quad ; \quad k_{\varphi_i} = 1 \Rightarrow \varphi_i \neq 0$$

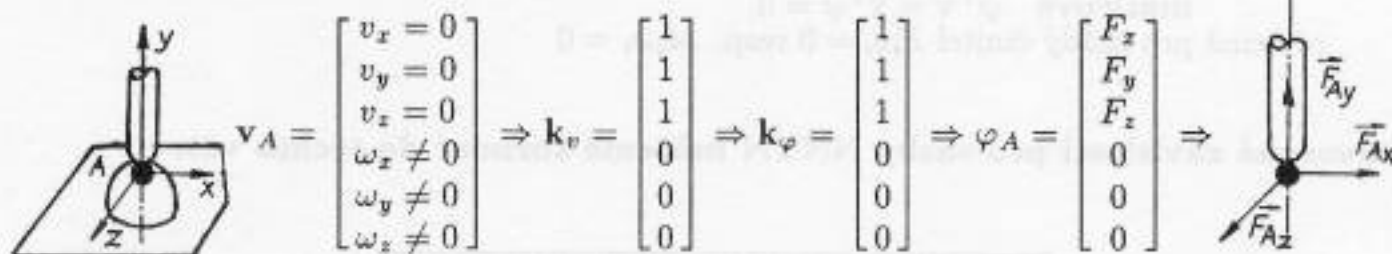
nebo φ_i je závislý na $\varphi_j \neq 0$.

Jako příklad si uvedeme rotační rovinnou vazbu (odst. 5.5)



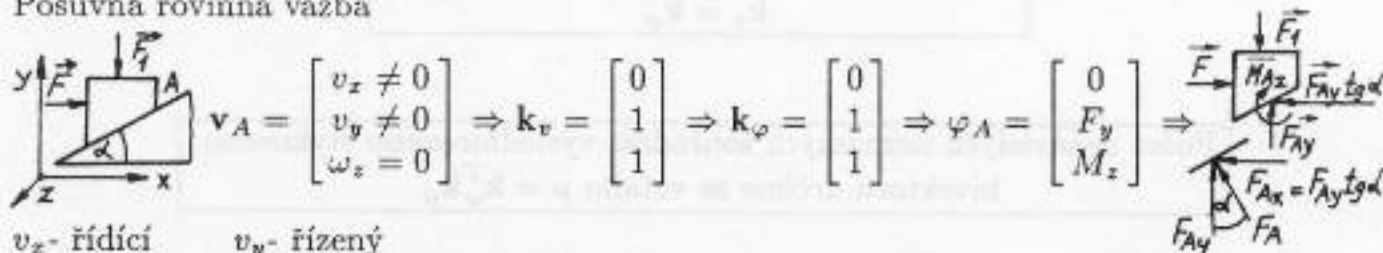
$$v_A = \begin{bmatrix} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} F_z \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \vec{F}_{Ax} \\ \vec{F}_{Ay} \end{array}$$

Prostorovou sférickou vazbou



$$v_A = \begin{bmatrix} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \\ \omega_x \neq 0 \\ \omega_y \neq 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} F_z \\ F_y \\ F_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \vec{F}_{Ay} \\ \vec{F}_{Ax} \\ \vec{F}_{Az} \end{array}$$

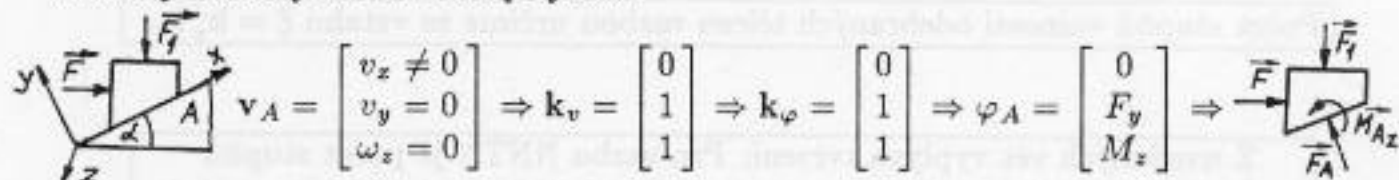
Posuvná rovinná vazba



$$v_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y \neq 0 \\ \omega_z = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \vec{F}_I \\ \vec{F}_{Ay} \\ \vec{F}_{Ax} = \vec{F}_{Ay} \tan \alpha \\ \vec{M}_{Az} \end{array}$$

v_x - řídicí v_y - řízený

Vhodněji zvolený souřadnicový systém



$$v_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow k_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \vec{F}_I \\ \vec{F} \\ \vec{F}_A \\ \vec{M}_{Az} \end{array}$$

Složky pohybu tělesa jako celku budou v důsledku stykové vazby závislé v těchto případech:

- Jestliže zvolíme nevhodně souřadnicový systém.

- b) Jestliže stykový útvar Γ_s se skládá z více oblastí, např. šroubová vazba. Tento případ můžeme chápat jako zvláštní uložení tělesa s více vazbami. Matice \mathbf{k}_φ udává obecně nenulové souřadnice výslednicového stykového bivektoru, které jsou po uvolnění vazby neúplně určené. Proto počet jedniček v \mathbf{k}_φ určuje počet neznámých nezávislých parametrů, který označíme μ . Zřejmě platí

$$\mu = \mathbf{k}_\varphi^T \mathbf{k}_\varphi \quad (7.7)$$

Jak jsme již uvedli, pohyb tělesa jako celku vzhledem k základnímu tělesu můžeme vyjádřit translačním pohybem jednoho bodu B tělesa a rotačním pohybem kolem bodu B. Pro libovolný bod C tělesa pak platí $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{CB}$. Pohyb tělesa jako celku v prostoru má tedy 6 nezávislých složek. Tři složky translačního pohybu libovolného bodu a tři složky rotačního pohybu kolem tří nezávislých os procházejících daným bodem. Počet nezávislých složek pohybu tělesa jako celku nazýváme počtem stupňů volnosti volného tělesa a značíme i_v . Pro volné těleso v prostoru $i_v = 6$, v rovině $i_v = 3$. V důsledku neprostupnosti těles stykové vazby pohyb tělesa omezují, odebírají tělesu stupně volnosti. Počet stupňů volnosti odebraných vazbou značíme ξ . Vzhledem k zavedení matice \mathbf{k}_v ($k_i = 0$ - složka pohybu geometricky možná, $k_i = 1$ - složka pohybu geometricky nemožná) platí:

$$\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v \quad (7.8)$$

Podmínku neutrálnosti vazby můžeme zapsat

$$\begin{aligned} \text{vektorově} \quad & \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega} = 0 \\ \text{algebraicky} \quad & F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z + M_x \omega_x + M_y \omega_y + M_z \omega_z = 0 \\ \text{maticově} \quad & \varphi^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \varphi = 0, \\ & \text{přičemž pro každý činitel } F_i v_i = 0 \text{ resp. } M_i \omega_i = 0 \end{aligned}$$

Odvozené závislosti pro vazby NNTN můžeme shrnout do těchto vět:

Pro styk těles NNTN vazbou platí vztah

$$\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_\varphi$$

Počet nezávislých neznámých souřadnic výslednicového stykového bivektoru určíme ze vztahu $\mu = \mathbf{k}_\varphi^T \mathbf{k}_\varphi$

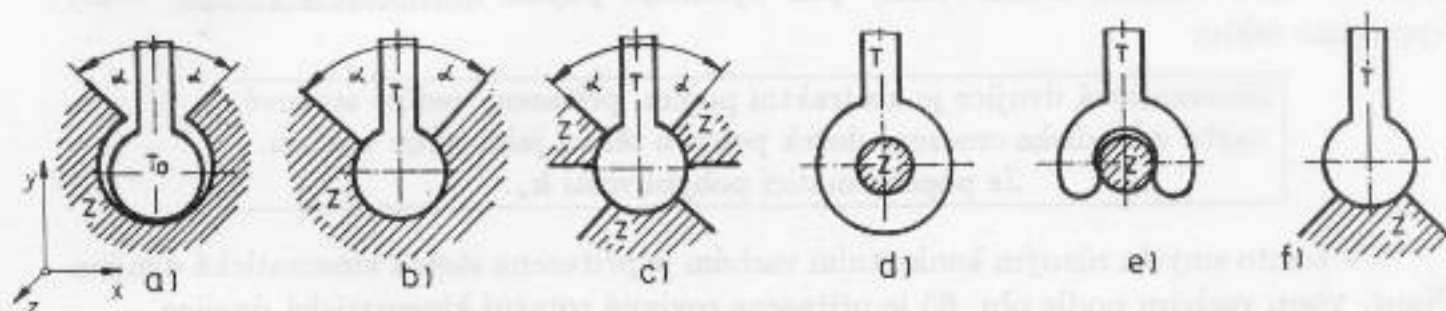
Počet stupňů volnosti odebraných tělesu vazbou určíme ze vztahu $\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v$

Z uvedených vět vyplývá tvrzení: Pro vazbu NNTN je počet stupňů volnosti odebraných vazbou roven počtu neznámých nezávislých souřadnic výslednicového bivektoru.

$$\xi = \mu$$

7.3 Uvolňování vazeb NNTN.

V předchozím odstavci jsme se zabývali kinematickými a silovými charakteristikami vazeb NNTN. Uvažovali jsme vazby s jedním stykovým útvarem Γ , a ukázali jsme, že z hlediska pohybu tělesa jako celku je kinematicky styk charakterizován maticí pohyblivosti k_v . Pokud jsme ve výkladu popsali vazbu, tak pouze z hlediska probírané látky. Všimněme si nyní několika konkrétních vazeb, jak jsou nakresleny na obr. 65.



Obr. 65

Z názoru by mělo být zřejmé, že ve všech případech styk umožňuje rotaci tělesa T kolem osy z . Z kinematického hlediska, na rozlišovací úrovni statiky, jsou všechny vazby stejné, protože matice k_v je pro všechny případy stejná. Přesto u každé vazby můžeme nalézt odlišnosti, které na vyšší rozlišovací úrovni nebo z hlediska funkce zařízení mohou být podstatné. Případy podle obr. a, b, c umožňují sice rotaci, ale možné natočení je ohraničeno. Liší se stykové plochy, což bude mít za následek rozdílné rozložení stykového tlaku. Vzhledem k různé velikosti stykové plochy budou rozdílné i maximální stykové tlaky. Liší se i počet stykových ploch. Vazba podle obr. d natočení neomezuje, těleso T se může otáčet dokola. Vazba e neomezuje natočení tělesa T , ale funkce styku je závislá na silové soustavě π působící na těleso T . U vazby podle obr. f je možné natočení tělesa T nejen ohraničeno, ale také funkce styku je závislá na silové soustavě π působící na těleso T . Pro některé silové soustavy vazba bude ve funkci, pro jiné nastane oddělení těles. Vidíme, že matice k_v vystihuje jen jistou možnost pohybu a že ke každé vazbě existují další omezení, ať již geometrická nebo silová.

Konkrétní provedení vazby podstatně ovlivňuje její funkční vlastnosti, které souvisí s celou řadou okolností funkčního charakteru a nesouvisí jen s mechanikou. Jsou to funkční požadavky na pohyb, montáž, mazání, opotřebování stykových ploch apod. Vlastní navrhování vazby je problém konstrukčního charakteru. Proto komplexní rozbor vazby patří do konstrukčních předmětů - částí strojů a předmětů specializací.

Na počátku studia mechaniky, v předmětu statika, se můžeme zabývat jen základními mechanickými vlastnostmi vazby souvisejícími s funkcí vazby a to:

- Určením možných složek pohybu vázaného tělesa.
- Ohraničením možných složek pohybu v mezních polohách např. vazby a, b, c - úhel α .
- Omezením pohybu z hlediska funkčnosti vazeb vyjádřené stykovými výslednicemi. Určování pohybu ve smyslu bodů a) a b) patří do kinematiky, kde bude také probráno.

Vzhledem ke vzájemné souvislosti mezi pohybem a silovým působením je nutné již ve statice pohyb vyšetřovat a to prozatím na úrovni vymezené v předchozím odstavci, kde složky pohybu tělesa jako celku, omezené vazbou, kvalitativně popisuje matice k_v . Na uvedené rozlišovací úrovni se z kinematického hlediska nezabýváme konkrétním tvarem, rozměry stykových ploch, mezními polohami a tím, zda může nastat zrušení styku rozpojením těles. Předpokládáme, že styk nastal a trvá.

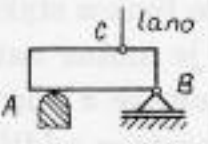
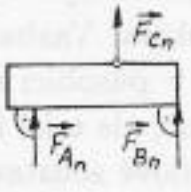
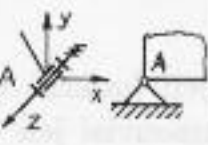
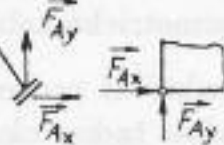
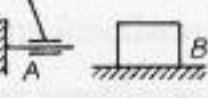
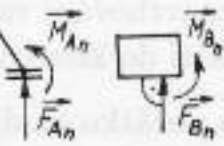

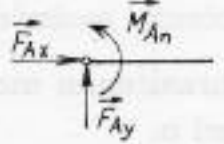
Kinematickou stránku reálné vazby pak vystihuje pojem kinematické dvojice, který vymezíme takto:

Kinematická dvojice je abstraktní pojem, přiřazený reálné stykové vazbě z hlediska omezení složek pohybu tělesa jako celku vazbou.
Je popsán maticí pohyblivosti k_v .

V tomto smyslu různým konkrétním vazbám je přiřazena stejná kinematická dvojice. Např. všem vazbám podle obr. 65 je přiřazena rovinná rotační kinematická dvojice.

Názvy a označení kinematických dvojic podle počtu a charakteru omezených složek pohybu tělesa jako celku vazbou jsou uvedeny v tabulkách 7 a 8. V souladu s odst. 7.2 jsou tabulky doplněny silovými a kinematickými charakteristikami a uvolněním jednotlivých vazeb.

Základní kinematické dvojice v rovině

Název	Značka	Schéma	\mathbf{v}_A $v_x \ v_y \ \omega_z$	φ_A $F_x \ F_y \ M_z$	Uvolnění	ξ
Obecná	o		$\neq 0 \ 0 \ \neq 0$	$0 \ F_y \ 0$		1
Rotační	r		$0 \ 0 \ \neq 0$	$F_x \ F_y \ 0$		2
Posuvná	p		$\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ M_z$		2
Vetknutí	n		$0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ M_z$		3

Tab. 7

Základní kinematické dvojice v prostoru

Název	Značka	Schéma	\mathbf{v}_A $v_x \ v_y \ v_z$ $\omega_x \ \omega_y \ \omega_z$	φ_A $F_x \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$	Uvolnění	ξ
Obecná	o		$0 \neq 0 \neq 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$F_x \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$		1
Sférická	s		$0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ 0 \ 0$		3
Rotační	r		$0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		5
Posuvná	p		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$		5
Rotačně posuvná	rp		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		4
Sféricko posuvná	sp		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \neq 0 \neq 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $0 \ 0 \ 0$		2
Plochá	pl		$\neq 0 \neq 0 \ 0$ $0 \ 0 \neq 0$	$0 \ 0 \ F_z$ $M_x \ M_y \ 0$		3
Vetknutí	n		$0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$	$F_x \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$		6
Šroubová	š		$\neq 0 \ 0 \ 0$ $0 \ 0 \ 0$ nebo $0 \ 0 \ 0$ $\neq 0 \ 0 \ 0$	$0 \ F_y \ F_z$ $M_x \ M_y \ M_z$ nebo $F_x \ F_y \ F_z$ $0 \ M_y \ M_z$		5

Tab. 8

K reálné vazbě ze statického hlediska přiřadíme model vazby, jehož kinematické vlastnosti nazveme a označíme podle tabulky. Např. rovinná rotační kinematická dvojice. Stejným jménem nazveme také model vazby, ale slovo model v názvu neuvádíme. Tedy rovinná rotační vazba. Vyjimku tvoří podpora a lano, které jsou obecné kinematické dvojice.

Z dosavadních úvah vyplývá, že vazba stykem na nejjednodušší úrovni je určena:

- a) **Přiřazenou kinematickou dvojicí**, která vyjadřuje omezené složky pohybu tělesa jako celku vzhledem ke geometrii stykové vazby. Pokud předmětem řešení je posloupnost rovnovážných stavů v různých polohách tělesa, případně určení rovnovážné polohy, pak z kinematického hlediska musíme ke kinematické dvojici přiřadit obor existence vazby z geometrického hlediska. U případů podle obr. 65 je to omezení úhlu natočení jistým intervalem geometrické existence $I_g = (\alpha_l, \alpha_p)$ s tímto významem. Pokud $\varphi \in I_g$ má vazba charakter rotační rovinné kinematické dvojice, v případě, že $\varphi = \pm\alpha$ mění se rotační kinematická dvojice na nepohyblivou. Hodnoty úhlu $\varphi = \pm\alpha$ do intervalu I_g nepatří. Uvedené vlastnosti vyjádříme větou:

U statických úloh, které jsou charakteristické změnou polohy tělesa vzhledem ke vztažnému tělesu, je nutné vazby stykem z kinematického hlediska určit maticí pohyblivosti a intervalem geometrické existence.

- b) **Stykovými silami** reprezentovanými silovou a momentovou výslednicí (stykovým výslednicovým bivektorem) \vec{F}_s, \vec{M}_{sB} , resp. stykovými funkcemi. Z obrázku 65 je zřejmé, že provedení vazby může významně ovlivňovat existenci vazby (přiřazenou kinematickou dvojici). Jestliže vazba omezuje pohyb v určitém směru, ale pouze v jednom smyslu, pak funkčnost vazby závisí na soustavě sil π působící na těleso T. Vymezení funkčnosti vazby můžeme vyjádřit podmínkami pro hodnoty parametrů výslednicových stykových bivektorů, tuto podmínku nazveme stykovou podmínkou.

Vazba NNTN je pak ze statického hlediska určena:

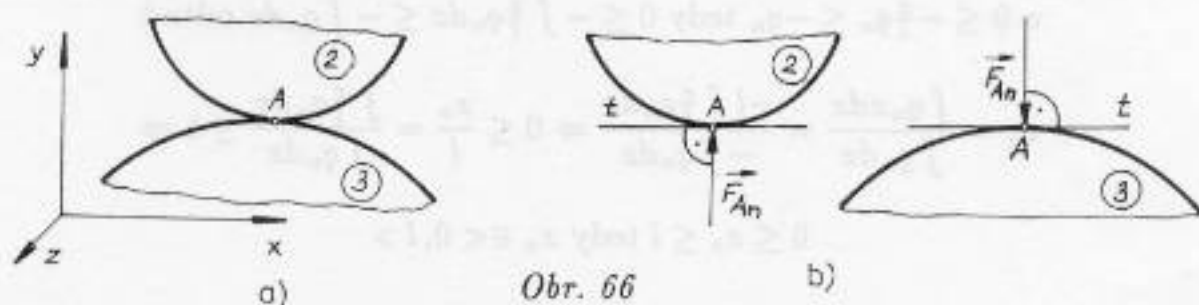
1. Maticí pohyblivosti \mathbf{k}_v .
2. Výslednicovým stykovým bivektorem $\{\vec{F}_s, \vec{M}_s\}_B$, resp. stykovými funkcemi.
3. Stykovou podmínkou.

V předchozích odstavcích jsme ukázali, že pro nejjednodušší možný styk NNTN platí $\mathbf{k}_v = \mathbf{k}_\varphi$, který dává jednoznačný vztah mezi kinematickou dvojicí a obecně nenulovými souřadnicemi výslednicového stykového bivektoru. K určení styku je však nutné ještě formulovat stykovou podmínku, která vychází z tlakovosti a neutrálnosti styku, tedy ze vztahů $dF_{An} \leq 0$, $d\vec{F}_A \cdot \vec{v}_A = 0$ pro $A \in \Gamma_s$, při kladné orientaci normály ven z tělesa T. Z uvedených vztahů je třeba určit stykovou podmínku pro výslednicový stykový bivektor. **Styková podmínka závisí na konkrétním provedení vazby.** Odvození provedeme pro podporu a rovinnou jednostrannou posuvnou vazbu.

1. Podpora.

Uvolnění vazby viz obr. 66b. Tělesa se stýkají v bodě A, který je působištěm síly $\vec{F}_{An} \equiv \vec{F}_{Ay}$. Výslednicový stykový bivektor můžeme vyjádřit k libovolnému bodu, zvolíme bod A, $\Phi = \{\vec{F}_{An}, \vec{0}\}_A$. Z podmínky tlakovosti vyplývá $\vec{F}_A \leq \vec{0}$. Styková podmínka podpory se stykem v bodě A je $\{\vec{F}_V, \vec{M}_V\}_A = \{\vec{F}_A \leq \vec{0}, \vec{0}\}$.

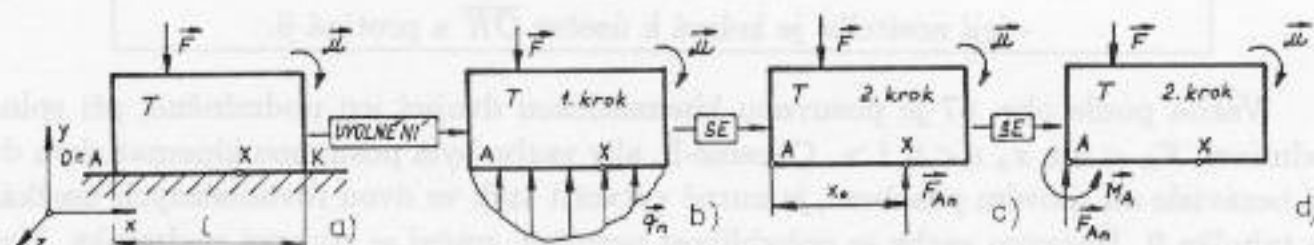
Momentová výslednice k bodu A je nulová a silová výslednice leží na normále n_A a je záporná. \vec{F}_A je orientována do tělesa.



Obr. 66

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uvolnění obr. 66b}$$

2. Rovinná jednostranná posuvná vazba. Viz obr. 67.



Obr. 67

$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} v_x \neq 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} \Rightarrow \text{uvolnění obr. 67d}$$

Tělesa se stýkají v úsečce \overline{OK} . Z neutrálnosti vazby vyplývá, že stykové síly tvoří soustavu rovnoběžných sil. Z podmínky tlakovosti vychází souhlasná orientace, tedy elementární stykové síly tvoří soustavu rovnoběžných souhlasně orientovaných sil v rovině. Silová výslednice této soustavy $\vec{F}_A \neq \vec{0}$, podle odts. 5.2 existuje osa silové soustavy π_s . Její polohu jsme označili v obr. 67 souřadnicí x_o , kterou určíme z podmínky statické ekvivalence

silových soustav π_A a π_V .

$$F_V : \int_0^l q_n dx = F_A \quad M_V : \int_0^l q_n x dx = M_A = F_A x_o \Rightarrow x_o = \frac{M_A}{F_A} = \frac{\int_0^l q_n x dx}{\int_0^l q_n dx}$$

Protože $q_n(x) < 0$ pro všechna $x \in \langle 0, l \rangle$ platí $0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$ odtud $0 \geq \frac{x}{l} q_n \geq q_n$
a $0 \leq -\frac{x}{l} q_n \leq -q_n$ tedy $0 \leq -\int \frac{x}{l} q_n dx \leq -\int q_n dx$ odtud

$$x_o = \frac{\int q_n x dx}{\int q_n dx} = \frac{-l \int \frac{x}{l} q_n dx}{-\int q_n dx} \Rightarrow 0 \leq \frac{x_o}{l} = \frac{\int \frac{x}{l} q_n dx}{\int q_n dx} \leq 1 \Rightarrow$$

$$0 \leq x_o \leq l \text{ tedy } x_o \in \langle 0, l \rangle$$

Má-li být rovinná jednostranná posuvná vazba funkční, a tím i posuvnou kinematickou dvojicí, musí platit:

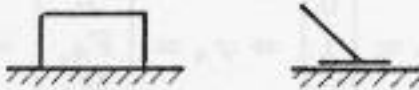
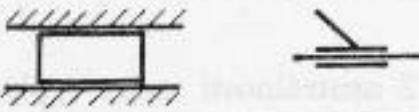
$F_A < 0$ a osa silové soustavy rozloženého silového působení ve styku protíná úsečku \overline{OK} a je k ní kolmá.

V souladu s odst. 5.1 tuto větu můžeme vyjádřit takto:

Soustavu rozloženého silového působení ve styku můžeme z hlediska statické ekvivalence nahradit jedinou silou, která je
- orientována do tělesa
- její nositelka je kolmá k úsečce \overline{OK} a protíná ji.

Vazba podle obr. 67 je posuvnou kinematickou dvojicí jen podmíněně, při splnění podmínek $F_A < 0$ a $x_o \in \langle 0, l \rangle$. Chceme-li, aby vazba byla posuvnou kinematickou dvojicí nezávisle na silovém působení, je nutné vytvořit styk ve dvou rovnoběžných úsečkách, viz tabulka 9. Úpravou vazby se pohyblivost nezmění, změní se styková podmínka. Upravená vazba není podmíněně funkční, je posuvnou kinematickou dvojicí nezávislou na soustavě π .

Posuvná vazba v rovině

Název	Schéma	Je posuvnou kinematickou dvojicí charakteru [0 1 1]
Jednostranná		podmíněně
Oboustranná		vždy

Tab. 9

Uvolnění rovinné oboustranné posuvné vazby dělá studentům problémy. Detailní rozbor této vazby ze statického hlediska je v [2] str. 43. Obdobně lze stykové podmínky

odvodit pro další vazby. Odvození a formulace stykových podmínek pro prostorové vazby je poněkud náročnější. V základním studiu je nebudeme uvádět.

7.4 Uložení vázaného tělesa.

Až dosud jsme se zabývali tělesem vázaným jedinou vazbou. Uvedli jsme základní kinematické a silové vlastnosti NNTN vazeb. Odvodili jsme vztah pro počet stupňů volnosti odebraných stykovou vazbou $\xi = \mathbf{k}_v^T \mathbf{k}_v$. Určili jsme, že počet stupňů volnosti volného tělesa v prostoru je $i_v = 6$ a v rovině $i_v = 3$. Počet stupňů volnosti tělesa vázaného jednou stykovou vazbou určíme ze vztahu

$$(7.9) \quad i = i_v - \xi, \quad 0 < \xi \leq 6$$

Těleso vázané jednou stykovou vazbou k základnímu tělesu je zvláštním případem, se kterým se ve strojírenské praxi setkáváme zcela výjimečně. Převážně se jedná o tělesa vázaná více stykovými vazbami, obecně různého typu. V souladu s odst. 3.3 budeme soustavu všech mechanických vazeb nazývat uložením tělesa, které označíme U . Kinematicky je uložení určeno soustavou kinematických dvojic, silově soustavou výslednicových stykových bivektorů. Tedy:

Uložení tělesa T je soustavou všech stykových vazeb, kterými je těleso vázáno k okolí. Prvkem uložení je vazba. Uložení je určeno:

- kinematicky - soustavou kinematických dvojic
- silově - soustavou výslednicových stykových bivektorů

U více vazeb je nutné uvažovat další závažnou okolnost - možnost omezování deformace. Přistupujeme-li ke staticce jako teorii vycházející z axiomu o nedeformovatelnosti těles, omezením deformace se zabývat nemusíme. Uvažujeme-li statiku jako část teoretického základu strojírenství, pak s ohledem na řešení konkrétních problémů na reálném (deformovatelném) tělese je nutné uvážit, zda omezení deformace je, či není podstatné. Ve staticce alespoň kvalitativně ve smyslu - uložení omezuje, neomezuje deformaci. V případě, že omezuje, pak určíme kolik deformačních parametrů je stykovými vazbami omezeno. Kvantitativním vyjádřením deformace se budeme zabývat až v pružnosti pevnosti. Proto si musíme uvědomit:

Při rozboru uložení tělesa musíme již ve staticce uvažovat deformaci ve smyslu možnosti jejího omezení a počtu omezených deformačních parametrů.

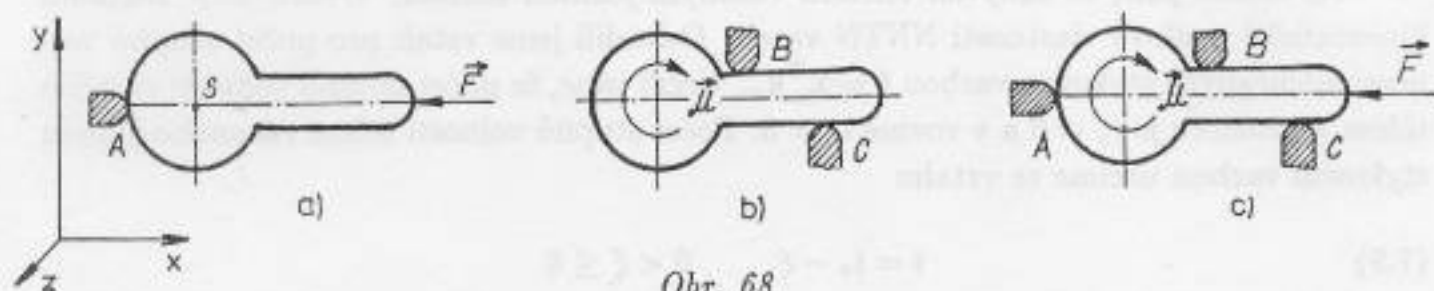
Musíme tedy respektovat následující skutečnost:

Uložení tělesa omezuje a ovlivňuje pohyb tělesa jako celku a deformaci.

Vyjádření pohyblivosti tělesa vázaného více než jednou stykovou vazbou je podstatně složitější problém než v případě jediné stykové vazby. Komplikace spočívá ve vzájemné závislosti složek mechanického pohybu omezených vazbami.

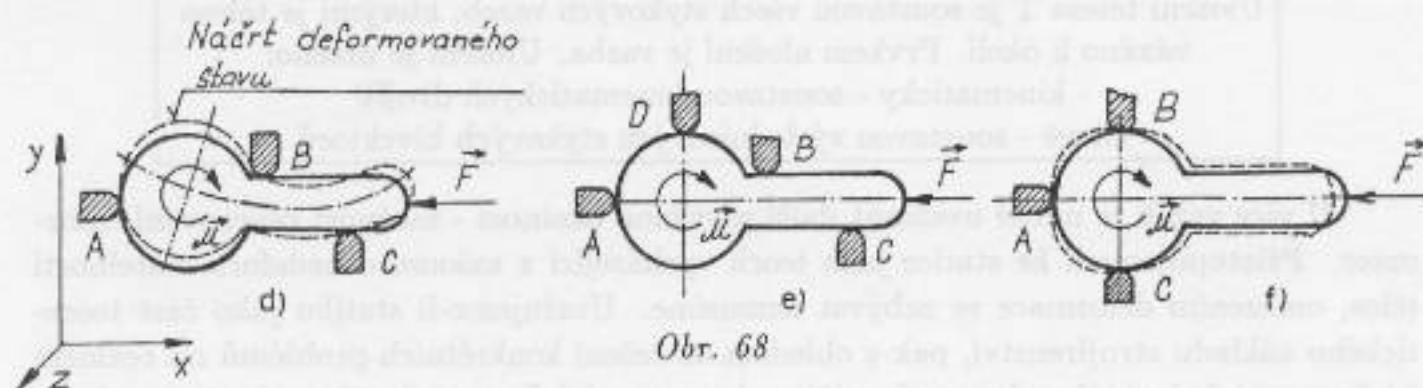
Jestliže je těleso podle obr. 68a vázáno jedinou podporou, pak dochází k omezení pohybu tělesa ve směru osy x . Matice pohyblivosti tělesa je totožná s maticí pohyblivosti

vazby A $\mathbf{k}_{vT} \equiv \mathbf{k}_{vA} = [1 \ 0 \ 0]^T$. Pokud je těleso vázáno dvěma vazbami uspořádanými podle obr. 68b, pak dochází k omezení pohybu ve směru osy y a rotaci kolem osy z . Matice pohyblivosti vázaného tělesa má tvar $\mathbf{k}_{vT} = [0 \ 1 \ 1]^T$, ale matice pohyblivosti vazeb jsou $\mathbf{k}_{vB} = \mathbf{k}_{vC} = [0 \ 1 \ 0]^T$.



Obr. 68

Na obrázku 68c je uložení tělesa pomocí tří podpor, matice pohyblivosti vázaného tělesa má tvar $\mathbf{k}_{vT} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Jestliže nyní přidáme ještě jednu podporu, pak pohyblivost (která popisuje pohyb tělesa jako celku) se nemůže změnit, protože těleso je uloženo nepohyblivě. Nyní vyvstává otázka, zda vazba D (obr. 68e) je z hlediska mechanického pohybu funkční? Chceme-li na tuto otázku odpovědět, musíme si na základě zkušenosti a názoru představit deformované těleso v případě c, viz obr. 68d.



Obr. 68

Z obrázků d) a c) je patrné, že vazba D je funkční a omezuje jeden deformační parametr - posuv bodu D ve směru osy y . Ve statické určování pohyblivosti tělesa a počtu omezených deformačních parametrů můžeme provádět na základě kinematického rozboru, který vychází z názoru a zkušenosti, ne z kinematického řešení. Nyní zformulujeme vztah pro určení pohyblivosti vázaného tělesa na úrovni kinematického rozboru.

$$i = i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) \quad (7.10)$$

- kde
- i - počet stupňů volnosti vázaného tělesa.
 - i_v - počet stupňů volnosti volného tělesa.
 - $\sum \xi_i$ - počet složek mechanického pohybu odebraných vazbami.
 - η - počet deformačních parametrů omezených stykovými vazbami.
 - $\sum \xi_i - \eta$ - počet stupňů volnosti odebraných stykovými vazbami.

Uložení tělesa podle obr. 68 a-e tvoří tzv. normální stavy, které jsou charakteristické tím, že při normálním ukládání tělesa stykovými vazbami se nejdříve omezuje pohyb tělesa

jako celku, až do nepohyblivého uložení tělesa a teprve pak dochází k omezení deformace. Vedle případů normálních existují případy výjimečné. Jeden výjimečný případ je zobrazen na obr. 68f. Vazby A,B omezují posuvy ve směru os x, y. Vazba C omezuje deformační parametr i když těleso je uloženo pohyblivě, může se otáčet kolem osy z. Výjimekové stavy jsou charakteristické tím, že dříve než byly omezeny složky pohybu tělesa jako celku dochází k omezení deformačních parametrů. Nyní pro jednotlivé případy podle obr. 68 určíme charakter uložení.

Poznámka k značení: r.k.d - r.....označení kinematické dvojice

- k.d....zkratka kinematické dvojice

Předpokládáme normální uložení.

$$\begin{array}{l} a) \\ A - o.k.d - \xi_A = 1 \\ \eta = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \\ B, C - o.k.d - \xi_i = 1 \\ \eta = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c) \\ A, B, C - o.k.d - \xi_i = 1 \\ \eta = 0 \end{array}$$

$$i = i_v - (\sum \xi_i - \eta)$$

$$\begin{array}{l} i = 3 - 1 = 2 \\ i = 2, \eta = 0 \end{array}$$

Těleso je uloženo pohyblivě se dvěma stupni volnosti, bez omezení deformačních parametrů

$$\begin{array}{l} i = 3 - 2 = 1 \\ i = 1, \eta = 0 \end{array}$$

Těleso je uloženo pohyblivě s jedním stupněm volnosti, bez omezení deformačních parametrů

$$\begin{array}{l} i = 3 - 3 = 0 \\ i = 0, \eta = 0 \end{array}$$

Těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů

$$\begin{array}{l} e) \\ A, B, C, D - o.k.d - \xi_i = 1 \end{array}$$

Vazby omezují více složek pohybu než je stupňů volnosti volného tělesa v rovině $\rightarrow \eta \neq 0$
 $i = 3 - (4 - 1) = 0$
 $i = 0, \eta = 1$

Těleso je uloženo nepohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem

$$\begin{array}{l} f) \\ A, B, C - o.k.d - \xi_i = 1 \end{array}$$

Těleso se může pootočit kolem osy z procházející bodem S $\rightarrow i_{min} = 1$
 $\sum \xi_i = 3 \rightarrow \eta = 1$
 $i = 3 - (3 - 1) = 1$
 $i = 1, \eta = 1$

Těleso je uloženo pohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem

Zobecněním jednotlivých případů obdržíme základní stavy, které vázané těleso z hlediska pohybu jako celku a deformace může nabývat.

Normální stavy uložení.

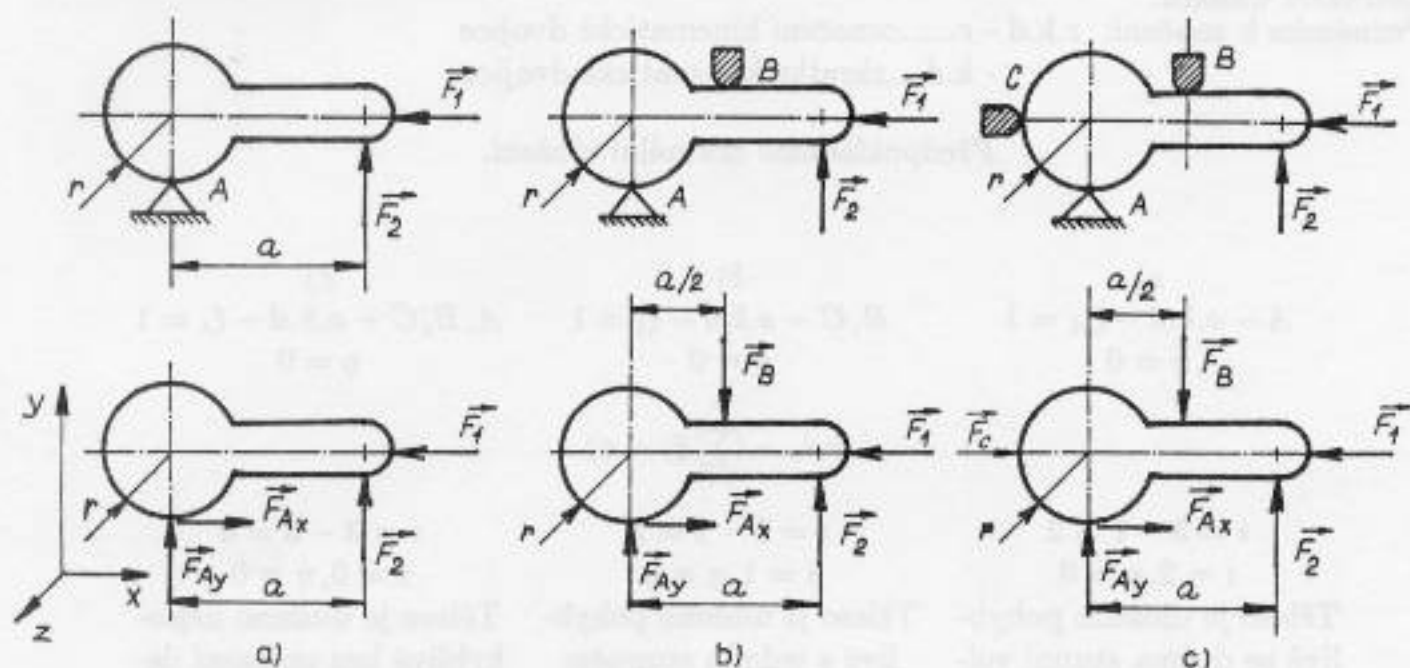
$i > 0, \eta = 0$ - těleso je uloženo pohyblivě bez omezení deformačních parametrů
 $i = 0, \eta = 0$ - těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů
 $i = 0, \eta > 0$ - těleso je uloženo nepohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Výjimekové stavy uložení.

$i > 0, \eta > 0$ - těleso je uloženo pohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Z předchozího textu vyplývá, že kinematický rozbor závisí na podkladech na jejichž základě si vytváříme představu o omezených složkách pohybu tělesa a zkušenostech

člověka, který rozbor provádí. Vzhledem k malým zkušenostem studentů si položíme otázku: "Jestliže se dopustím chyby v určení pohyblivosti v důsledku malých zkušeností, jsem schopen na základě statického řešení chybu poznat?" Abychom na tuto otázku mohli odpovědět a získali základní představu, provedeme kinematický rozbor a sestavíme statické podmínky pro některé typy uložení tělesa. Předpokládejme, že těleso podle obrázku je ve statické rovnováze. Pak jsme oprávněni sestavit podmínky statické rovnováhy.



Obr. 69

a)

$$A - r.k.d - \xi_i = 2$$

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ i &= 3 - 2 = 1 \\ i &= 1, \eta = 0 \end{aligned}$$

Uložení tělesa je pohyb -
livé bez omezení
deformačních parametrů

b)

$$\begin{aligned} A - r.k.d - \xi_i &= 2 \\ B - o.k.d - \xi_i &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= 0 \\ i &= 3 - 3 = 0 \\ i &= 0, \eta = 0 \end{aligned}$$

Uložení tělesa je ne -
pohyblivé bez omezení
deformačních parametrů

c)

$$\begin{aligned} A - r.k.d - \xi_i &= 2 \\ B, C - o.k.d - \xi_i &= 1 \end{aligned}$$

Kinematické dvojice odníma -
jí více parametrů než je slo -
žek pohybu tělesa jako celku

$$\begin{aligned} \sum \xi_i &= 4, i_v = 3 \rightarrow \eta = 1 \\ \eta &= 1 \\ i &= 3 - (4 - 1) = 0 \\ i &= 0, \eta = 1 \end{aligned}$$

Uložení tělesa je nepohyb -
livé s jedním omezeným
deformačním parametrem

Podmínky statické rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_x : -F_1 + F_{Ax} &= 0 \\ F_y : F_{Ay} + F_2 &= 0 \\ M_{zA} : F_1 r + F_2 a &= 0 \\ \mu_F &= 2, \nu = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -F_1 + F_{Ax} &= 0 \\ F_{Ay} - F_B + F_2 &= 0 \\ F_1 r + F_2 a - F_B \frac{a}{2} &= 0 \\ \mu_F &= 3, \nu = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{Ax} + F_C - F_1 &= 0 \\ F_{Ay} - F_B + F_2 &= 0 \\ F_1 r + F_2 a - F_B \frac{a}{2} - F_C r &= 0 \\ \mu_F &= 4, \nu = 3 \end{aligned}$$

Neznámé nezávislé parametry budeme rozlišovat podle charakteru neznámých souřadnic.

μ_F - silové

μ_M - momentové

μ_r - polohové, viz obr. 67 – x_0

ad a) $\boxed{\mu < \nu}$ uložení je staticky přeuročené. Pak mohou nastat tyto dva případy.

- $\mu < \nu$
- $(\nu - \mu)$ – podmínek statické rovnováhy je identicky splněno. Těleso, které je uloženo pohyblivě je ve statické rovnováze.
 - $(\nu - \mu)$ – podmínek statické rovnováhy je sporných. Těleso, které je uloženo pohyblivě není ve statické rovnováze, proto podmínky statické rovnováhy nejsme oprávněni sestavit. K určení silového působení je nutné sestavit pohybové rovnice, což je úloha dynamická. (Ve staticce neumíme.)

U případů podle obr. 69a, je-li $F_1 \neq 0 \wedge F_2 \neq 0$ pak $F_1 r + F_2 a \neq 0 \Rightarrow$ Těleso podle obrázku je uloženo pohyblivě a není ve statické rovnováze, není splněn počáteční předpoklad. Silové působení můžeme určit z pohybových rovnic, které ve staticce neumíme sestavit.

ad b) $\boxed{\mu = \nu \wedge \mu_M + \mu_r < \nu_M}$ - je splněna nutná podmínka statické určitosti úlohy.

(μ_M, μ_r určujeme z momentových podmínek rovnováhy, proto $\mu_M + \mu_r < \nu_M$)
Soustava statických rovnic je lineární. Určíme hodnotu determinantu soustavy.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{a}{2} \end{vmatrix} = -\frac{a}{2} \neq 0$$

Soustava statických rovnic má právě jedno řešení. Uložení je staticky určité - neznámé nezávislé parametry určíme ze statických podmínek.

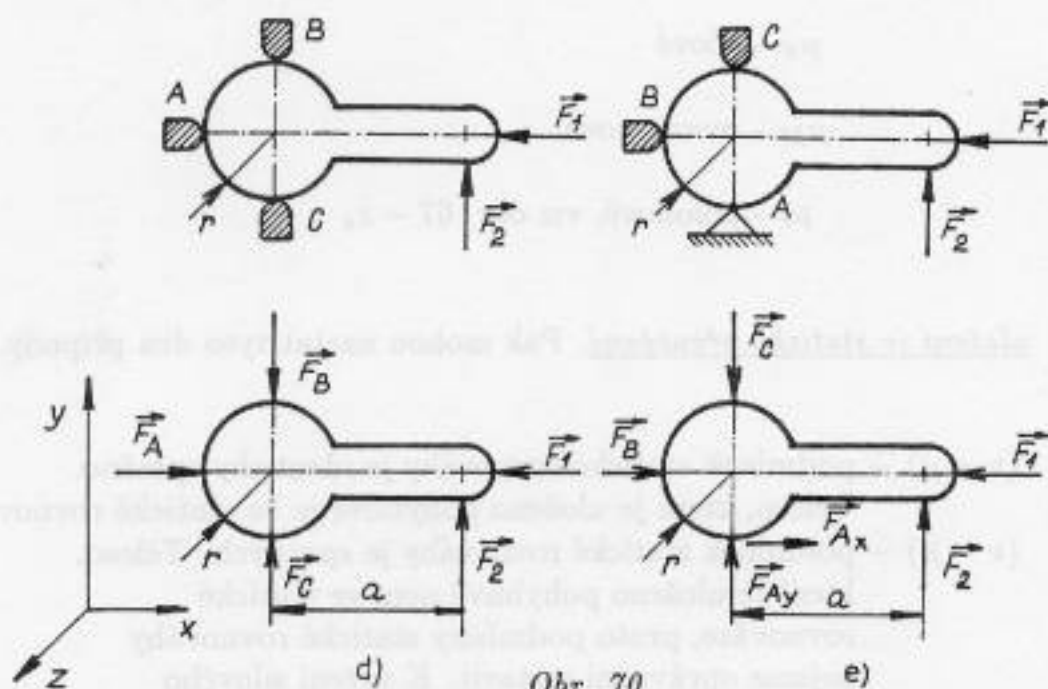
ad c) $\boxed{\mu > \nu}$ - uložení je staticky neurčité.

Neznámých nezávislých parametrů $NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}, F_B, F_C\}$ je více než podmínek statické rovnováhy.

Stupeň statické neurčitosti určíme ze vztahu:

$$\boxed{s = \mu - \nu}$$

Další dva případy jsou **výjimečné**.



Obr. 70

Kinematický rozbor

d)
A, B, C – o.k.d $\xi_i = 1$

Na základě malých zkušeností se
dopustíme chyby a předpokládáme

$$\begin{aligned}\eta &= 0 \\ i &= 3 - 3 = 0 \\ i &= 0, \eta = 0\end{aligned}$$

Těleso je uloženo nepohyblivě
bez omezení deformačních
parametrů

e)
A – r.k.d – $\xi_i = 2$
B, C – o.k.d $\xi_i = 1$

Kinematické dvojice odnímají
více parametrů než je složek
pohybu tělesa jako celku $\eta = 1$

$$\begin{aligned}i &= 3 - (4 - 1) = 0 \\ i &= 0, \eta = 1\end{aligned}$$

Těleso je uloženo nepohyblivě
s jedním omezeným deformačním
parametrem

Podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned}F_x: -F_1 + F_A &= 0 \\ F_y: F_C - F_B &= 0 \\ M_{zS}: F_2 a &= 0 \\ \mu_F &= 3, \nu = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_x: -F_1 + F_B + F_{Ax} &= 0 \\ F_y: F_{Ay} - F_C + F_2 &= 0 \\ M_{zA}: F_1 r + F_2 a - F_B r &= 0 \\ \mu_F &= 4, \nu = 3\end{aligned}$$

ad d) Momentová podmínka rovnováhy je sporná $\Rightarrow \nu = 2$, těleso se může otáčet kolem osy z procházející bodem S, tedy $i = 1, \eta = 1$. Těleso je uloženo pohyblivě s jedním omezeným deformačním parametrem. **Uložení tělesa je výjimečné.**

ad e) **Uložení tělesa je staticky neurčitě.** Vzhledem k tomu, že \vec{F}_C a \vec{F}_{Ay} leží na jedné nositelce můžeme označit $\vec{F}_{Ay,C} = \vec{F}_{Ay} - \vec{F}_C$. Z podmínek statické rovnováhy

neurčíme všechny neznámé nezávislé parametry $\{F_{Ax}, F_{Ay}, F_B, F_C\}$. Můžeme však určit množinu modifikovaných parametrů $\{F_{Ax}, (F_{Ay} - F_C), F_B\}$. Protože množinu modifikovaných parametrů můžeme sestavit pouze v případě, že dvě síly nebo složky sil leží na jedné nositelce, nazveme danou úlohu staticky neurčitou výjimečnou. Z uvedených případů je zřejmé, že určení pohyblivosti a statické řešení spolu souvisí a chybný předpoklad v kinematickém rozboru na základě statického řešení můžeme opravit.

Ze statického hlediska rozlišujeme uložení:

Staticky určité - všechny neznámé nezávislé parametry stykových výslednic určíme ze statických podmínek.

Staticky neurčité - k určení neznámých nezávislých parametrů statické podmínky nestačí.

Staticky neurčité - ze statických podmínek nelze určit všechny neznámé nezávislé parametry, lze však určit parametry modifikované.

Určení charakteru uložení tělesa je důležitou úlohou mechaniky těles. Určení pohyblivosti a omezení deformace vyžaduje zvládnutí kinematiky a pružnosti. Ve staticce, která tyto předměty předchází, se můžeme omezit jen na ty případy, kdy lze pohyblivost i omezení deformačních parametrů posoudit spolehlivě z názoru. Určení statického charakteru uložení však vychází z rozboru vlastností statických rovnic a tuto úlohu můžeme řešit ve staticce. Souhrnně můžeme konstatovat:

Těleso z hlediska uložení a soustavy π úplně určených silových prvků je charakterizováno:

- pohyblivostí $i \geq 0$
- mírou omezení deformace $\eta \geq 0$
- je-li $i > 0$ pak charakterem pohybu z hlediska statické rovnováhy
 - SR = 0 - statická rovnováha nastává
 - SR = 1 - statická rovnováha nenastává
- je-li $\eta > 0, i = 0$ - mírou statické neurčitosti $s = \mu - \nu$
- v případě staticky neurčitého uložení výjimečného - mírou statické řešitelnosti $s_v = \mu_v - \nu$, kde μ_v je počet modifikovaných neznámých nezávislých parametrů.


Ve staticce u tělesa vázaného NNTN vazbami budeme rozlišovat uložení.

pohyblivé	nepohyblivé
omezující deformaci	neomezující deformaci
zajišťující statickou rovnováhu	nezajišťující statickou rovnováhu
staticky určité	staticky neurčité
normální	výjimečné

Zvládnutí analýzy uložení patří k důležité části úlohy nejen ve staticce, ale i v ostatních předmětech mechaniky těles. Dnes podstata není v řešení statických podmínek, to zvládne

hravě běžný počítač. Důležitá je analýza chování, v tomto případě analýza vlastností uložení. Na závěr shrneme vlastnosti uložení NNTN vazbami, vyplývající z předchozího rozboru.

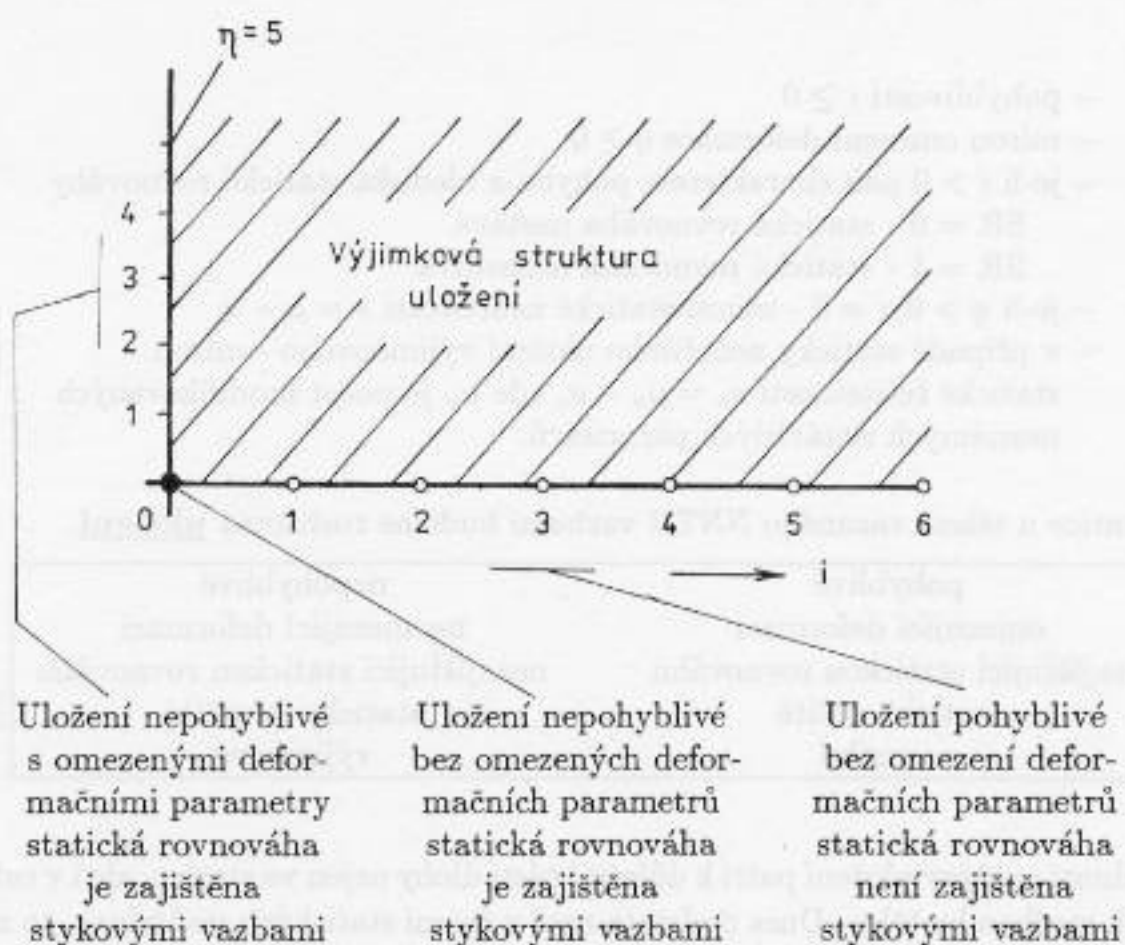
Normální případy.

Statická určitost		pohyblivost a identické splnění statických podmínek ve směru neomezených složek pohybu tělesa jako celku
		nepohyblivost bez omezení deformace
Statická neurčitost	→	nepohyblivost a omezení deformace

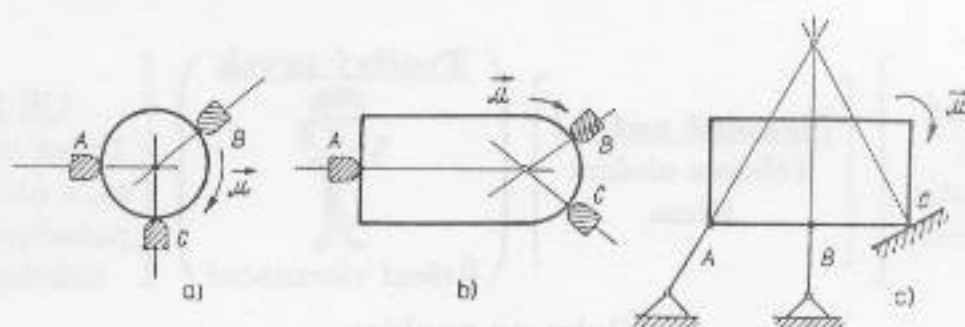
Výjimkové případy.

Uložení výjimkové	→	pohyblivost a omezení deformace
Uložení staticky neurčité výjimkové	→	nepohyblivost a omezení deformace, možnost určení modifikovaných parametrů

Vlastnosti uložení vazbami NNTN můžeme graficky znázornit takto:



Několik příkladů vyjímkového uložení tělesa.



Obr. 71

Detailní rozbor uložení tělesa je proveden u každé úlohy A[68] - A[84] v [2]. Z pedagogického hlediska není vhodné tyto úlohy pouze procházet, ale je nutné je samostatně řešit a řešení pouze zkontrolovat a promyslet.

Vzhledem k tomu, že jsme již probrali všechny základní operace a činnosti týkající se silového přístupu řešení úloh statiky, můžeme přistoupit k jejich kategorizaci.

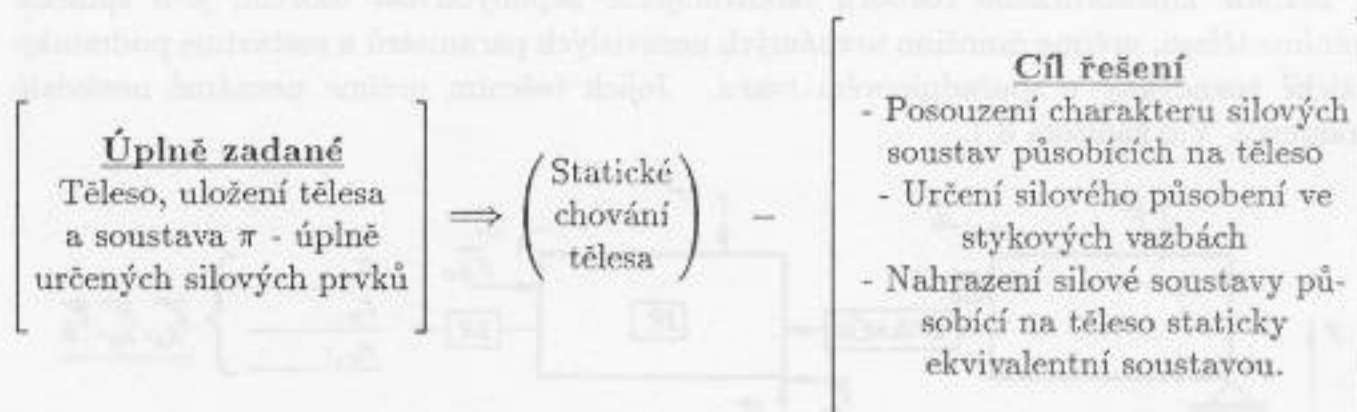
7.5 Typy statických úloh

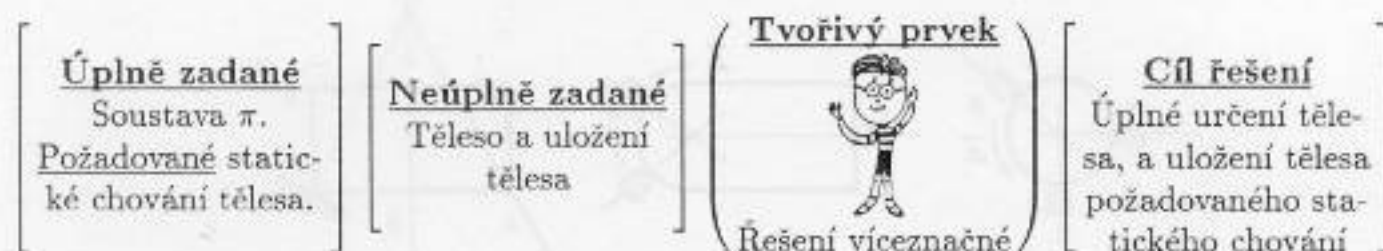
Základní členění úloh a to nejen ve statice je následující

- úlohy na statickou analýzu
- úlohy na statickou syntézu

Úlohy na statickou analýzu a syntézu se liší tím, co je zadáno a co se má řešením určit. Obě skupiny můžeme stručně charakterizovat takto:

Úlohy na analýzu





A) Úlohy na analýzu

Úlohy na statickou analýzu dělíme na

- úlohy o statické kontrole
- úlohy o statickém řešení
- úlohy týkající se nahrazení úplně zadané silové soustavy jinou silovou soustavou, jejíž neúplně zadané prvky můžeme určit ze statického řešení.

Úlohy o statické kontrole:

Kontrola statické ekvivalence silových soustav π_1, π_2 působících na těleso.

Na uvolněné nebo vázané těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků π_1 nebo π_2 , které jsou staticky ekvivalentní. Provedte kontrolu statické ekvivalence silových soustav π_1 a π_2 .

Je-li $\vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 \wedge \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2$ – pak π_1 a π_2 jsou staticky ekvivalentní.

Kontrola charakteru silové soustavy.

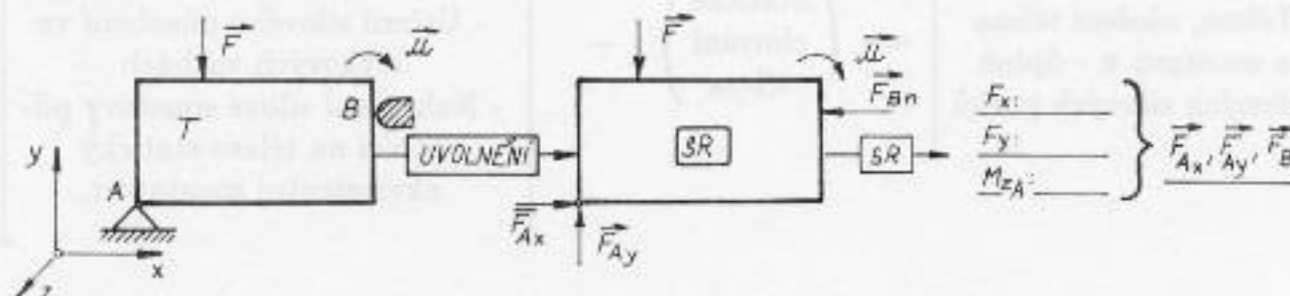
Na těleso T působí úplně zadaná soustava π , která je rovnovážnou silovou soustavou. Zkontrolujte rovnovážnost silové soustavy.

Je-li $\vec{F}_V = \vec{0} \wedge \vec{M}_V = \vec{0}$ – pak π je rovnovážnou soustavou.

Úlohy o statickém řešení:

Určení výsledných stykových sil. Na vázané těleso podle obrázku 72 působí úplně zadaná soustava π . Uložení vázaného tělesa má být nepohyblivé staticky určité. Zkontrolujte uložení tělesa a jsou-li splněny podmínky zadání určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.

Na základě kinematického rozboru zkontrolujeme nepohyblivost uložení, je-li splněna uvolníme těleso, určíme množinu neznámých nezávislých parametrů a sestavíme podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru. Jejich řešením určíme neznámé nezávislé parametry. Viz kapitola 8.1.



Obr. 72

Nahrazení úplně určené soustavy sil staticky ekvivalentní soustavou sil - zpravidla jedinou silou.

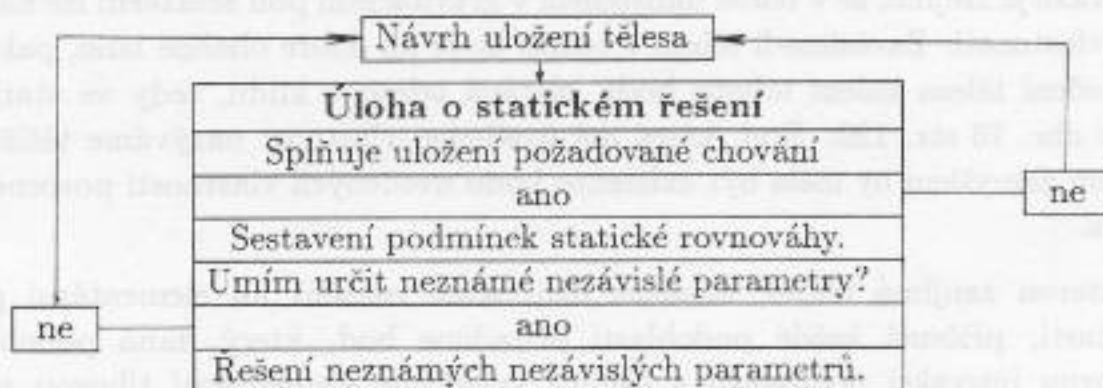
Je-li to možné, nahraďte soustavu úplně zadaných sil π_1 jedinou silou. Nutná a postačující podmínka pro nahrazení silové soustavy jedinou silou je $\vec{F}_V \neq 0 \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{M}_V = 0$. Je-li tato podmínka splněna, pak z podmínky statické ekvivalence musí platit $\vec{F}_V^1 = \vec{F}_V^2 = \vec{F}_{ek} \wedge \vec{M}_{VB}^1 = \vec{M}_{VB}^2$.

B) Úlohy na syntézu

Úlohy na syntézu mají ve strojírenství nejrozličnější charakter. My se omezíme pouze na úlohy charakteristické pro studium statiky na strojírenské fakultě, které mohou být zadány takto: Soustava těles podle obrázku má být nepohyblivá staticky určitá. Po eventuálních úpravách vazeb zaručujících podmínky zadání určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.

Charakter úprav souvisí s tvůrčím přístupem studenta. Řešení je víceznačné, přičemž jednotlivá řešení jsou operačně různě náročná.

Charakter úloh o syntéze můžeme schématicky znázornit takto:



C) Úlohy o stabilitě

Řešíme-li reálný problém, pak musíme uvažovat odchylky. Posouzení významnosti odchylek z hlediska řešeného problému není jednoduché a v řadě případů je nelze provést pouze na základě představy nebo odhadu. Jestliže uvažujeme odchylky, pak je nutné je zahrnout do soustavy úplně určených silových prvků, která pak obsahuje soustavu silových prvků jmenovitých hodnot π_j a soustavu π' zahrnující odchylky, tedy $\pi_o = \pi_j \cup \pi'$.

Počet použitelných statických podmínek určíme:

a) v případě že odchylky neuvažujeme ze soustavy

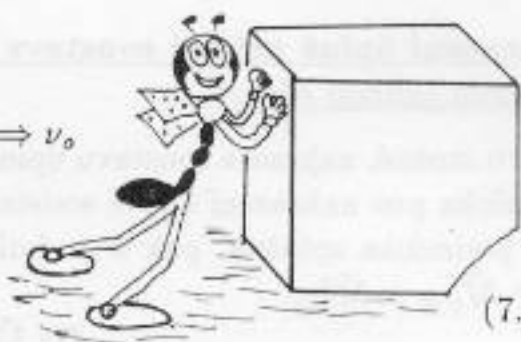
$$\pi_\nu = \pi_j \cup \pi_R \Rightarrow \nu$$

b) v případě s odchylkami ze soustavy

$$\pi_{\nu_e} = \pi_j \cup \pi_R \cup \pi' \Rightarrow \nu_o$$

Míru statické stability pak určíme ze vztahu

$$q = \nu_o - \nu \quad (7.11)$$



Uložení tělesa je staticky stabilní jestliže $q = 0$, přičemž rozlišujeme uložení

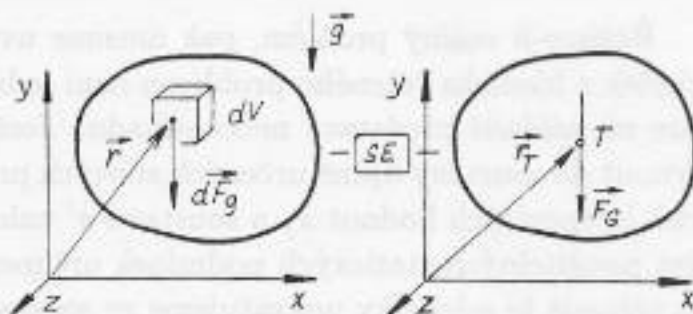
- úplně stabilní - $q = 0 \wedge \nu_o = \nu = 6$
- částečně stabilní - $q = 0 \wedge \nu_o \neq 6$
- nestabilní - $q \neq 0$

Uvedený rozbor je proveden za předpokladu, že pro styk můžeme použít model NNTN styku. Z příkladu na obrázku je zřejmé, že při uvažování odchylek je nutné také posoudit model styku. Odtud vyplývá, že řešení reálných problémů statiky je vždy komplexní činnost, velmi často interdisciplinárního charakteru.

7.6 Určení tíhové síly.

Mezi základní statické úlohy, které jsme obecně probrali v předchozím odstavci, patří vyjádření silového působení na těleso v gravitačním poli Země. Je to úloha, kterou studenti znají z předchozího studia. O významu jejího řešení se mohou velmi často přesvědčit. Z každodenní praxe je zřejmé, že v tělese umístěném v gravitačním poli zemském lze nalézt bod T s touto vlastností: Zavěsíme-li těleso v tomto bodě na dobře ohebné lano, pak při jakémkoliv natočení tělesa kolem tohoto bodu zůstává těleso v klidu, tedy ve statické rovnováze. Viz obr. 76 str. 120. Bod, který má uvedenou vlastnost nazýváme těžištěm tělesa. Po malém zamyšlení by měla být existence bodu uvedených vlastností pozornému studentu zřejmá.

Oblast, kterou zaujímá těleso, můžeme disjunktně rozdělit na elementární prostorové podoblasti, přičemž každé podoblasti přiřadíme bod, který daná podoblast obsahuje. Silovou interakci podoblasti s okolím vyjádříme elementární tíhovou silou $d\vec{F}_G = \vec{g}\rho dV$ viz obr. 73. Vzhledem k vlastnostem gravitačního pole a velikosti těles ve strojírenství, jsou nositelky elementárních tíhových sil rovnoběžné. Mají svislý směr a jsou orientovány k Zemi. Na těleso pak působí soustava rovnoběžných elementárních sil v prostoru. Zvolíme-li souřadnicový systém pevně spojený s tělesem, pak při otáčení tělesa, působí na těleso soustava rotujících rovnoběžných sil. Podle odst. 5.2 tato soustava má osu a osy sestavené v jednotlivých polohách procházejí vždy jedním bodem, střediskem soustavy elementárních tíhových sil - těžištěm.



Obr. 73

Podle odstavce 5.1 osa silové soustavy je nositelkou staticky ekvivalentní síly. Tíhová síla je tedy staticky ekvivalentním nahrazením soustavy elementárních tíhových sil jedinou silou. Tíhovou sílu a polohu těžiště určíme z podmínky statické ekvivalence silových soustav π_g a π_G viz obr. 73.

$$\int_{\Omega} \vec{g} \rho dV = \vec{F}_V^g = \vec{F}_V^G = \vec{F}_G \quad \int_{\Omega} (\vec{r} \times \vec{g}) \rho dV = \vec{M}_{V_g}^g = \vec{M}_{V_g}^G = \vec{r}_T \times \vec{F}_G$$

Nechť $\vec{g} = g\vec{j}$ pak platí $\vec{F}_G = \int_{\Omega} g \rho dV \vec{j} = F_G \vec{j}$

$$\vec{M}_{V_g}^g = \int_{\Omega} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (g\vec{j}) \rho dV = \int_{\Omega} (x\vec{k} - z\vec{i}) g \rho dV$$

$$\vec{M}_{V_g}^G = (x_T \vec{i} + y_T \vec{j} + z_T \vec{k}) \times F_G \vec{j} = (x_T \vec{k} - z_T \vec{i}) F_G$$

Rovnice (7.12) je pak splněna tehdy a jen tehdy je-li

$$(7.13) \quad x_T = \frac{\int g \rho x dV}{F_G} = \frac{\int g \rho x dV}{\int g \rho dV}; \quad z_T = \frac{\int g \rho z dV}{\int g \rho dV}; \quad \text{obdobně } y_T = \frac{\int g \rho y dV}{\int g \rho dV}$$

Vlastnosti těžiště je možné shrnout do těchto bodů:

1. Těžiště je bodem tělesa, kterým prochází osa soustavy elementárních tíhových sil při každém natočení tělesa.
2. Tíhová síla, je staticky ekvivalentní se soustavou elementárních tíhových sil, prochází těžištěm a při každém natočení má vzhledem k souřadnicovému systému spojenému se Zemí stejnou velikost, směr a smysl.

Proto:

Těleso vázané v těžišti bez omezení natáčení je v každé natočené poloze ve statické rovnováze.

Vedle statického vymezení těžiště, které vychází z vlastností soustavy elementárních tíhových sil působících na těleso v gravitačním poli zemském, lze těžiště vymežit na základě elementárních setrvačných sil. V newtonovské mechanice je statické a dynamické těžiště totožné.

Ve statice budeme vyžadovat plné pochopení pojmu těžiště podle statického vymezení.

Z vymezení střediska soustavy rovnoběžných rotujících sil a těžiště vyplývá:

Těžiště je totožné se střediskem soustavy elementárních tíhových sil, tedy $\vec{r}_T \equiv \vec{r}_s$

Poloha těžiště vzhledem k souřadnicovému systému (O,x,y,z) je jednoznačně určena

vztahy:

$$x_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho x dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}; \quad y_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho y dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}; \quad z_T = \frac{\int_{\Omega} g \rho z dV}{\int_{\Omega} g \rho dV}$$

$$\vec{r}_T = x_T \vec{i} + y_T \vec{j} + z_T \vec{k}$$

Z vlastností gravitačního pole, materiálu těles a vyjádření těžiště můžeme vyslovit věty, které nám určování polohy těžiště v řadě úloh usnadní.
K nejdůležitějším patří věty 1 - 6.

1. Na strojírenské rozlišovací úrovni je $\vec{g} = konst.$ Polohu těžiště určíme ze vztahů:

$$x_T = \frac{g \int_{\Omega} x \rho dV}{g \int_{\Omega} \rho dV} = \frac{\int_{\Omega} x \rho dV}{\int_{\Omega} \rho dV}; \quad y_T = \frac{\int_{\Omega} y \rho dV}{\int_{\Omega} \rho dV}; \quad z_T = \frac{\int_{\Omega} z \rho dV}{\int_{\Omega} \rho dV} \quad (7.14)$$

což můžeme zapsat takto

$$\vec{r}_T = x_T \vec{i} + y_T \vec{j} + z_T \vec{k} = \frac{1}{\int_{\Omega} \rho dV} \left(\vec{i} \int_{\Omega} x \rho dV + \vec{j} \int_{\Omega} y \rho dV + \vec{k} \int_{\Omega} z \rho dV \right) \quad (7.15)$$

2. Rozdělíme-li oblast Ω , kterou těleso T zaujímá na konečný počet podoblastí Ω_i tak, že $\Omega = \cup \Omega_i$ a $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ - disjunktní dělení - pak z vlastností integrálu plyne

$$\vec{r}_T = \frac{\int_{\Omega} \vec{r} \rho dV}{\int_{\Omega} \rho dV} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \vec{r} \rho dV}{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \rho dV} \quad (7.16)$$

označíme-li \vec{r}_{T_i} polohový vektor těžiště části tělesa Ω_i a $\int_{\Omega_i} \rho dV = m_i$ hmotnost této části, pak platí:

$$\vec{r}_{T_i} = \frac{\int_{\Omega_i} \vec{r} \rho dV}{\int_{\Omega_i} \rho dV} = \frac{\int_{\Omega_i} \vec{r} \rho dV}{m_i} \Rightarrow \int_{\Omega_i} \vec{r} \rho dV = \vec{r}_{T_i} m_i \quad (7.17)$$

Jestliže po rozdělení oblasti Ω na n podoblastí Ω_i známe polohu těžiště podoblastí, pak polohu těžiště oblasti Ω určíme ze vztahu

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n (\vec{r}_{T_i} m_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^n \vec{r}_{T_i} \cdot m_i \quad (7.18)$$

3. Rozdělíme-li těleso na dvě podoblasti Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ a $m = m_1 + m_2$, pak platí:

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_{T_1} m_1 + \vec{r}_{T_2} m_2}{m} = \frac{\vec{r}_{T_1} m_1 + \vec{r}_{T_2} (m - m_1)}{m} = \vec{r}_{T_2} + \frac{m_1}{m} (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}) = \vec{r}_{T_1} + \frac{m_2}{m} (\vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1})$$

4. Jestliže těleso má geometricky a hmotnostně bod, osu nebo rovinu souměrnosti, pak těžiště leží na útvaru souměrnosti. Věta je přímým důsledkem předchozí věty, neboť v případě souměrnosti platí $m_1 = m_2 = \frac{m}{2} \Rightarrow$

$$\vec{r}_T = \vec{r}_{T_2} + \frac{m_1}{m} (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}) = \vec{r}_{T_2} + \frac{m_1}{2m_1} (\vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}) = \frac{\vec{r}_{T_1} + \vec{r}_{T_2}}{2}$$

5. Je-li těleso homogenní t.j. $\rho = konst$ v celé oblasti Ω , pak

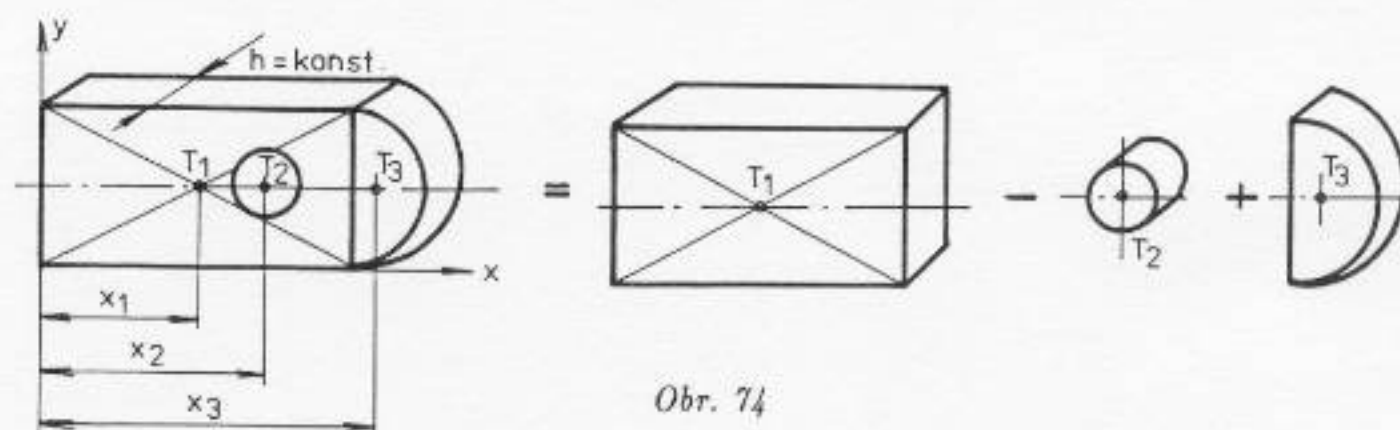
$$(7.19) \quad \vec{r}_T = \frac{\rho \int_{\Omega} \vec{r} dV}{\rho \int_{\Omega} dV} = \frac{\int_{\Omega} \vec{r} dV}{V}$$

6. Těžiště tělesa je jednoznačně určeno průsečíkem os soustavy elementárních tíhových sil pro dvě polohy tělesa.

Tato věta nám umožní nalézt polohu těžiště experimentálně na základě dvou měření, na rozdíl od hledání systémem pokus - omyl.

Určování polohy těžiště:

1. **Integrací podle definičních vztahů (7.13).** Tento způsob určování těžiště má význam především pedagogický, protože se týká určování těžiště oblastí ohraničené jednoduše matematicky popsatelnou plochou nebo křivkou. Poloha těžiště těchto oblastí byla integrací již určena a proto se jedná o procvičení nebo ověření znalostí aplikace určitého integrálu studenty. Viz úlohy A[60] - A[67] v [2].
2. **Numerickými integračními metodami.** V případech, kdy oblast je ohraničená složitější plochou nebo křivkou nebo hranice oblasti není vyjádřena v analytickém tvaru, ale pouze v diskrétních bodech, může být vhodné použít numerických integračních metod, které v současné době patří k základnímu vybavení počítače.
3. **Rozdělením tělesa na jednoduché útvary - prvky,** jejichž těžiště i hmotnosti byly určeny analyticky a jsou známy. Při určování těžiště celého tělesa využíváme součtových vlastností integrálu. Integrál součtu (rozdílu) je roven součtu (rozdílu) integrálů. Např. těžiště tenkého homogenního tělesa podle obr. 74 určíme takto:

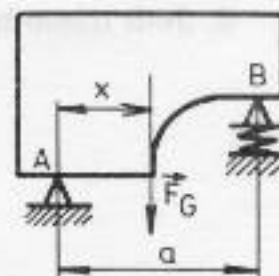


$$x_T = \frac{\rho_1 x_1 S_1 - \rho_2 x_2 S_2 + \rho_3 x_3 S_3}{\rho_1 S_1 - \rho_2 S_2 + \rho_3 S_3}$$

kde S_1 – plocha obdélníka
 S_2 – plocha kruhového otvoru
 S_3 – plocha polokruhu

K tomuto způsobu patří i postup, kdy těleso složitějšího tvaru aproximujeme konečným počtem jednoduchých, přesně definovaných geometrických útvarů, přičemž aproximace tělesa není primární z hlediska určení těžiště např. v MKP.

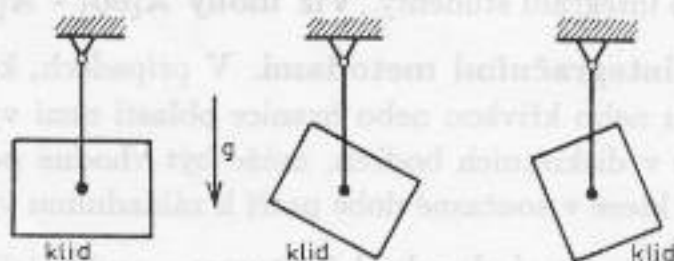
4. **Experimentálně.** Experimentálně polohu těžiště můžeme určit na základě určení polohy dvou různoběžných os tak, jak to bylo popsáno na začátku tohoto odstavce. V důsledku obtíží souvisejících s realizací závěsu a určení polohy osy v tělese se tohoto způsobu používá pouze pro odhad polohy těžiště (zavěšování břemen při přemísťování těles jeřábem). Viz obr. 76.



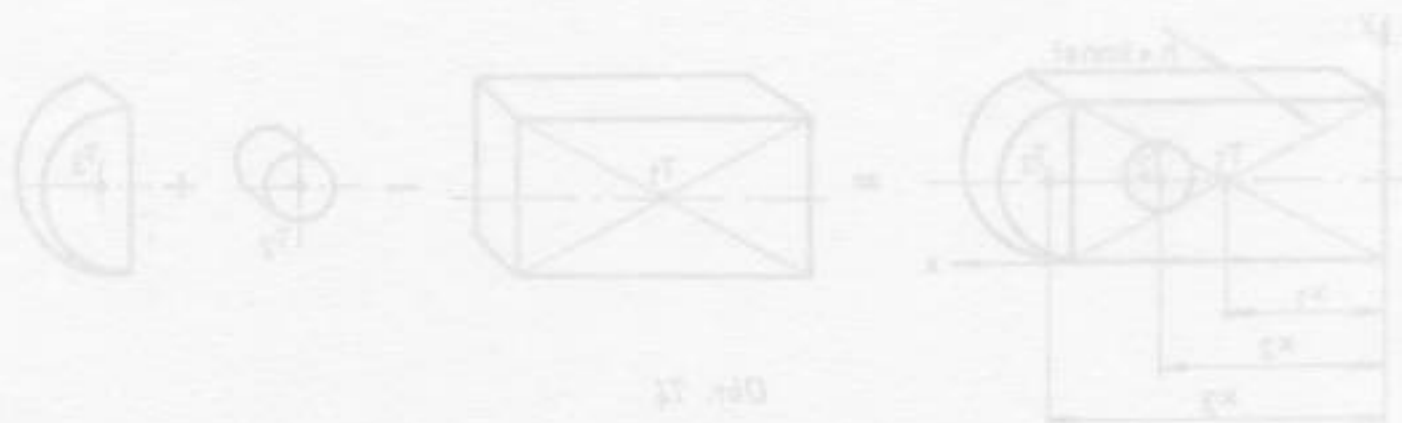
Obr. 75

Můžeme-li těleso vhodně podepřít a změřit síly v místě podpor, pak na základě řešení statické rovnováhy vázaného tělesa, kterou se budeme zabývat v následující kapitole, určíme souřadnice těžiště. Opakováním tohoto postupu v potočené poloze určíme zbývající souřadnice těžiště. Viz obr. 75.

Určení polohy těžiště na základě dynamické definice a vztahů, které z ní vyplývají patří do předmětu dynamika těles.



Obr. 76



Kapitola 8.0

Vázané těleso s vazbami NNTN

8.1 Řešení statické rovnováhy vázaného tělesa.

Na základě předchozího výkladu je zřejmé, že pro vázaná tělesa můžeme z hlediska statické rovnováhy řešit úlohu o statickém řešení a návrh nebo úpravu uložení zajišťující staticky určité uložení tělesa.

Vzhledem k závažnosti těchto úloh pro další studium a praxi rozebereme celý postup podrobněji s názornými ukázkami a formulací postupu z výpočtového hlediska, které je obecnější a v současné době pro řešení praktických problémů vhodnější než řešení grafické.

Variantu úlohy o statickém řešení s grafickým řešením probereme v samostatné kapitole 10. Postup řešení uvedených úloh je konkretizací obecného postupu řešení úloh mechaniky těles v [1] str. 57 a znalostí z předchozích kapitol.

Úloha I.

1. Zadání:

Na těleso T geometricky zadané údaji na obr. 77a:

- působí soustava úplně zadaných silových prvků (rozloženého silového působení, sil a silových dvojic) - síla \vec{F}_1 , silová dvojice určená momentem \vec{M} a tíhová síla.
- těleso je vázáno k základnímu tělesu soustavou vazeb, pro které můžeme použít model styku NNTN.
- dále je zadána požadovaná funkce uložení tělesa. Uložení tělesa má být staticky určité.

Úkolem je:

- a) Zkontrolovat zda požadovaná funkce uložení je splněna. Ve staticce je požadovanou funkcí zpravidla statická určitost, je-li splněna, pak je těleso ve statické rovnováze.
- b) V případě, že je těleso ve statické rovnováze, pak určit výsledné stykové síly nebo zadané stykové funkce.

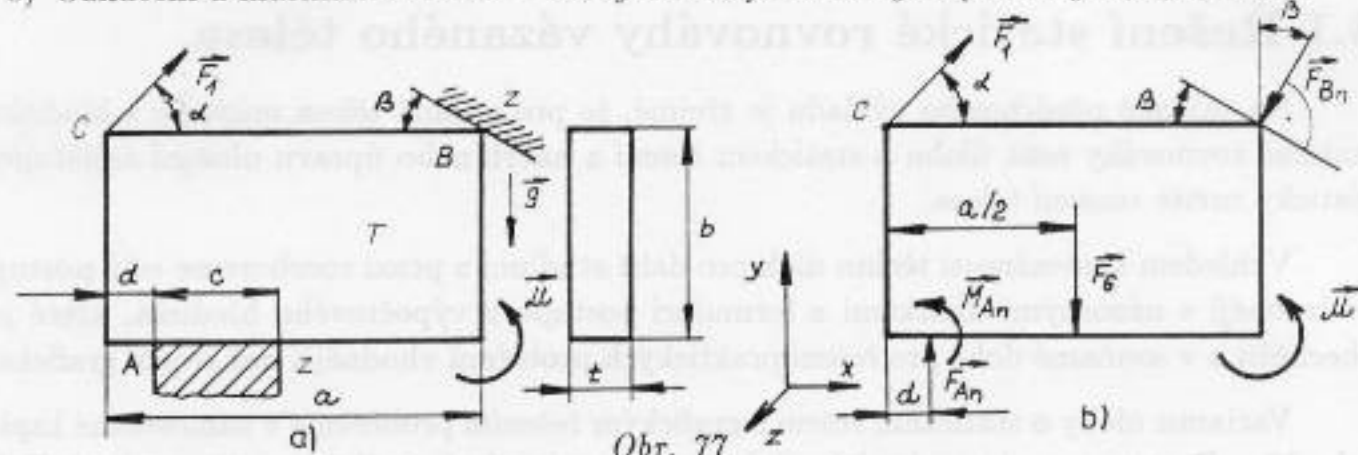
2. Rozbor úlohy:

- a) Kontrola formální správnosti a úplnosti zadání ([1] str. 57) - *Zadání je úplné a správné.*
- b) Klasifikace prostorovosti úlohy nebo přiřazeného modelového objektu. - *Ze zadaných hodnot je zřejmé, že úlohu můžeme řešit jako rovinnou.*
- c) Označení těles. - *Základní těleso označujeme Z nebo v případě, že předmětem řešení je soustava těles číslem 1. Těleso označujeme T, v případě soustav těles dalšími*

číslicemi 2,3

d) Vymezení soustavy úplně zadaných silových prvků. $\pi = \{ \vec{F}_1, \vec{M}, \{d\vec{F}_\Omega\} \} = \{ \vec{F}_1, \vec{M}, \vec{F}_G \}$

e) Označení a klasifikace vazeb. - Vazby označujeme velkými písmeny A, B, C, D



Obr. 77

3. Řešení úlohy:

a) Kinematický rozbor - určení pohyblivosti

vazba A - omezuje posuv ve směru osy y a otáčení kolem osy z

A - p.k.d - $\xi = 2$

vazba B - omezuje posuv ve směru osy x

B - o.k.d - $\xi = 1$

$$i = i_v - (\sum \xi_i - \eta)$$

$$i = 3 - [(2 + 1) - 0] \Rightarrow i = 0, \eta = 0$$

Těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

Nepohyblivost je zajištěna stykovými vazbami.

b) Uvolnění tělesa. Viz obr. 77b.

Vazba A - jednostranná posuvná k.d (viz odst. 7.3) Ve stykové ploše vazby A zvolíme bod, který označíme A.

Ve zvoleném bodě vyjádříme silové působení ve styku v souladu s odst. 7.3 \vec{F}_A, \vec{M}_A .

Vazba B - obecná k.d - ve stykovém bodě vyjádříme silové působení silou \vec{F}_B .

Vazby A, B jsou podmíněně funkční. Zvolená orientace sil do tělesa odpovídá funkčnosti vazeb. (Pozor - šipky neoznačují smysl sil, ten dosud neznáme, označují pouze předpokládaný smysl. Smysl sil určíme z podmínek statické rovnováhy. Jestliže souřadnice síly určená z podmínky statické rovnováhy má znaménko + resp. - pak síla má předpokládaný resp. opačný smysl.

c) Statický rozbor:

- α) Volba souřadnicového systému. Souřadnicový systém zvolíme libovolně, ale z hlediska řešeného problému vhodně.
 β) Vymezení soustavy neúplně zadáných silových prvků π_R , množiny neznámých nezávislých parametrů a jejich počtu.

$$\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\} \text{ resp. } \{\vec{F}_A, \vec{M}_A, \vec{F}_B\}$$

Množinu neznámých nezávislých parametrů označíme NP.

$$\text{NP} = \{F_{A_n}, M_{A_n}, F_{B_n}\}$$

Počet NP je $\mu = 3$, z toho $\mu_F = 2, \mu_M = 1$.

- γ) Klasifikace soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$ a určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy.

$\pi_\nu = \{\vec{F}_1, \vec{M}, \vec{F}_G, \vec{F}_A, \vec{M}_A, \vec{F}_B\}$ – silová soustava π_ν je rovinnou silovou soustavou, další specifikace není zřejmá. Proto v souladu s odst. 6.4 je počet použitelných statických podmínek v základním tvaru

$$\nu = 3, (\nu_F = 2, \nu_M = 1).$$

- δ) Ověření nutné podmínky statické určitosti.

Úloha je staticky určitá, jestliže NP můžeme určit ze statických podmínek, což je splněno jestliže:

$$\boxed{\mu = \nu}$$

Uvážíme-li dále strukturu statických rovnic a neznámých nezávislých parametrů je zřejmé, že silové rovnice rovnováhy obsahují pouze souřadnice sil. Proto neznámé souřadnice momentů nebo polohových parametrů můžeme určit pouze z momentových podmínek, tedy:

$$\boxed{\mu_r + \mu_M \leq \nu_M}$$

Z uvedené úvahy vyplývá tvar nutné podmínky statické určitosti úlohy:

$$\boxed{\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M}$$

V případě zadané úlohy je $\mu = 3, \nu = 3, \mu_M = 1, \nu_M = 1 \Rightarrow$ nutná podmínka statické určitosti je splněna a má smysl pokračovat ve statickém řešení.

d) Sestavení statických rovnic

$$F_x : F_1 \cos \alpha - F_{B_n} \sin \beta = 0$$

$$F_y : F_1 \sin \alpha + F_{A_n} - F_{B_n} \cos \beta - F_G = 0$$

$$M_{z_C} : -F_{B_n} \cos \beta a - F_G \frac{a}{2} + F_{A_n} d + M_{A_n} + \mathcal{M} = 0$$

e) Rozbor soustavy statických rovnic

Jedná se o soustavu tří lineárních nehomogenních rovnic o třech neznámých. Tuto soustavu zapíšeme v maticovém tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} F_{A_n} \\ F_{B_n} \\ M_{A_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \beta & 0 \\ 1 & -\cos \beta & 0 \\ d & -a \cos \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -F_1 \cos \alpha \\ F_G - F_1 \sin \alpha \\ F_G \frac{a}{2} - \mathcal{M} \end{bmatrix}$$

$\text{Det } A = \sin \beta \implies$ pro $\beta \neq 0$ soustava má jednoznačné řešení. Při řešení na počítači neurčujeme samostatně hodnotu determinantu. Kontrola případné singularity matice A je součástí algoritmu řešení soustavy lineárních rovnic.

f) Řešení soustavy statických rovnic.

Vstupní údaje: $a, b, c, d, t, \alpha, \beta, F_1, \mathcal{M}, g$

Výstupní údaje: $F_{A_n}, F_{B_n}, M_{A_n}$

Výstupní údaje určíme buď s použitím malé výpočetní techniky (kalkulačka) nebo na počítači.

4. Zhodnocení výsledků řešení:

1) Kontrola funkčnosti vazeb:

Vazba A: Je-li $F_{A_n} > 0$ - síla orientována do tělesa a $x_o = \frac{M_{zA}}{F_{Az}} \in \langle 0, c \rangle$ pak je vazba A funkční.

Vazba B: Je funkční je-li $F_{B_n} > 0$ - síla je orientována do tělesa.

Vzhledem k tomu, že úlohu řešíme obecně nemůžeme provést konkrétní hodnocení.

5. Formulace závěru

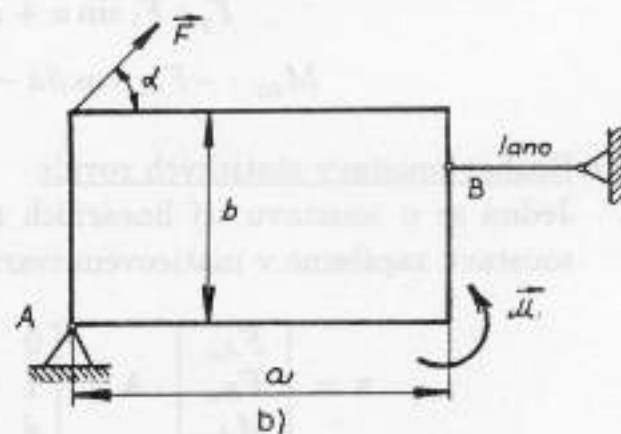
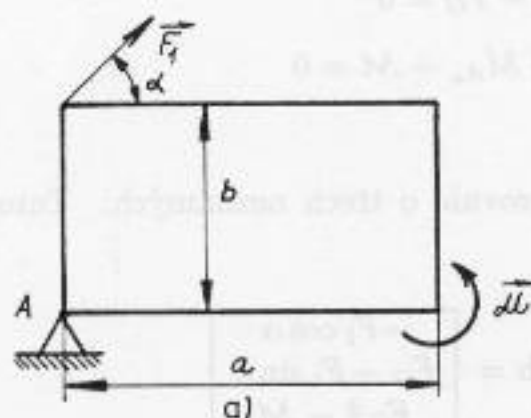
Zadání bylo v plném rozsahu splněno. Je-li $\beta \neq 0$ a stykové vazby funkční je těleso podle obrázku uloženo staticky určitě.

Řešená úloha má charakter úlohy o statickém řešení, na rozdíl od následující úlohy, která se týká úpravy uložení tělesa z hlediska požadované funkce.

Úloha II.

1. Zadání:

Na těleso T geometricky zadané údaji na obr. 78a působí soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{\mathcal{M}}\}$. Uložení tělesa má být nepohyblivé a staticky určité. Upravte stykové vazby tak, aby uložení tělesa splňovalo požadované funkce. Po úpravě určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.



Obr. 78

Úkolem je:

- Navrhnout uložení tělesa požadované funkce.
- Pro navržené uložení určit výpočtovým způsobem výsledné stykové síly.

Pro navržené uložení, viz obr. 78b, provedeme statické řešení s tím, že stále kontrolujeme zda navržené uložení splňuje požadovanou funkci t.j. nepohyblivost a statickou určitost řešené úlohy. Pokud provádíme úpravy uložení, pak je nutné provést nové statické řešení. Postup statického řešení pro navržené uložení byl předmětem úlohy I, proto jej nebudeme opakovat.

Poznámky k vázanému tělesu:

V poznámce uvedeme problémy, které se v úlohách I a II nevyskytují a není vhodné je uvádět na zvláštní úloze nebo uvedené úlohy zbytečně komplikovat.

- V úloze I se vyskytuje posuvná k.d, pro kterou jsme určili výsledné silové působení \vec{F}_A, \vec{M}_A , viz obr. 77b. Stykovým útvarem vazby A v případě rovinného modelu je úsečka. Pro určení rozloženého silového působení $q(x)$ máme dvě podmínky statické ekvivalence. Viz obr. 79.

$$F_A = \int_0^c q dx \quad M_A = \int_0^c qx dx \quad (8.1)$$

Z těchto podmínek lze určit jen dva neznámé parametry, proto styková funkce $q(x)$ na úrovni statiky může obsahovat jen dva parametry. Dva parametry obsahuje lineární závislost $q = ax + b$. Po dosazení do vztahu (8.1) obdržíme dvě rovnice pro dvě neznámé.

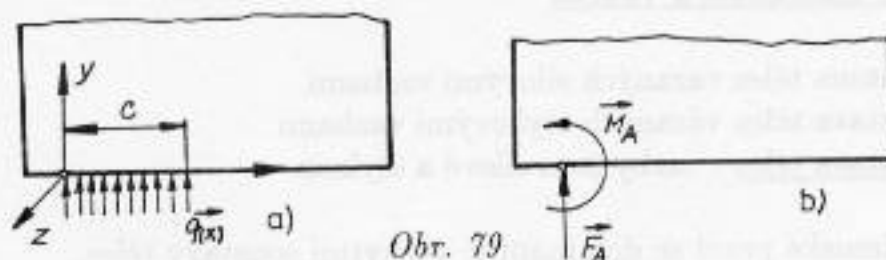
$$F_A = \int_0^c (ax + b) dx = a \frac{c^2}{2} + bc \quad M_A = \int_0^c (ax + b) \cdot x \cdot dx = a \frac{c^3}{3} + b \frac{c^2}{2}$$

Po určení a, b dostáváme $q = \frac{6}{c^2} \left(\frac{2M_A}{c} - F_A \right) x + \frac{2}{c} \left(2F_A - \frac{3M_A}{c} \right)$

- Obsah množiny NP, tvoří ty parametry silového působení, které po uvolnění tělesa neznáme. Pokud pro sílu známe pouze její existenci pak $NP = \{x, y, F_x, F_y, F_z\}$ nebo $\{y, z, F_x, F_y, F_z\}$ případně $\{x, z, F_x, F_y, F_z\}$, což je důsledkem věty o posouvání síly po její nositelce. Ze statického hlediska nelze určit polohu síly, ale pouze její nositelku, proto jednu polohovou souřadnici můžeme zvolit.

Z předchozího výkladu a úloh je zřejmé, že k řešení statické rovnováhy vázaného tělesa je nutné získat názor na silové působení a zkušenosti s řešením statické rovnováhy.

Detailně vypracované úlohy na statické řešení jsou v [2] úlohy A[68] - A[84].



Kapitola 9.0

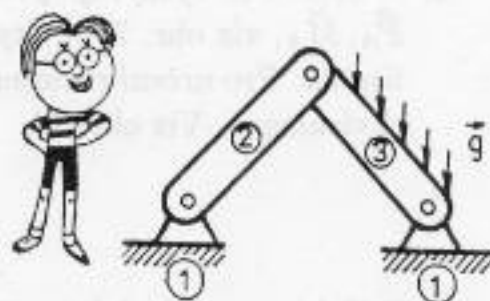
Soustavy těles s vazbami typu NNTN.

9.1 Charakteristiky soustav těles.

V souladu s výkladem obsahu pojmu soustava v odst. 3.1 a podrobněji [1] str. 37, budeme za soustavu těles považovat uspořádání těles vzájemně vázaných vazbami tak, že tělesa se z mechanického hlediska ovlivňují a tvoří celek.

To znamená, že pohyb těles, jejich deformace a silové působení mezi tělesy je důsledkem primárního působení okolí na tělesa soustavy nebo na něm závisí.

V souladu s výkladem v [1] budeme za soustavu těles považovat soustavu reálných, reálně vzájemně vázaných těles. Pro myšlenkové operace (úvahy týkající se tvorby a řešení problémů na soustavách těles) budeme k soustavě těles přiřazovat abstraktní útvary - systémy těles. Protože naším primárním zájmem jsou soustavy, budeme hovořit o soustavách i když pracovat budeme převážně se systémy, které přiřadíme k těmto soustavám z hlediska řešení problému.



Obr. 80

Na rozlišovací úrovni statiky je základním prvkem soustavy těles těleso. Je to nejednodušší prvek, který budeme ve staticce uvažovat a také uvolňovat. Je samozřejmé, že se můžeme zabývat i prvky, které jsou částí tělesa. Ty však budou předmětem našeho zájmu až v pružnosti pevnosti. Proto pro předmět statika je základním prvkem těleso.

Se soustavami těles se setkáváme všude kolem sebe a již z běžného života a předchozího vzdělání víme, že soustavy těles jsou nejrůznějšího charakteru. Liší se počtem, tvarem, podstatou, funkcí, ... těles, různým charakterem vazeb i chováním celé soustavy. Předmětem zájmu v technice jsou soustavy s požadovaným funkčním chováním. Jsou to soustavy charakteru technických objektů - technické soustavy. Na počátku studia strojního inženýrství není možné zabývat se detailně přehledem a klasifikací různých typů soustav. To je třeba vytvářet postupně v souladu s celkovým rozvojem znalostí. Již ve staticce musíme klasifikovat a rozlišovat soustavy podle hledisek, která odpovídají úrovni a obsahu látky v předmětu statika. Soustavy těles budeme rozlišovat:

1. Podle charakteru vazeb:

- soustava těles vázaných silovými vazbami
- soustava těles vázaných stykovými vazbami
- soustava těles - vazby jsou silové a stykem

Ve strojírenské praxi se dominantně vyskytují soustavy těles.

2. Podle vztahu k základnímu tělesu

Volná soustava – vazby soustavy jako celku k základnímu tělesu jsou na dané rozlišovací úrovni nepodstatné nebo nerozlišitelné.

Vázaná soustava – vazby soustavy jako celku k základnímu tělesu z hlediska řešeného problému jsou podstatné.

Pro strojírenství jsou typické vázané soustavy těles, tedy soustavy vázané k základnímu tělesu, které je nepohyblivé, což znamená, že žádné silové působení ostatních těles nezmění pohybový stav základního tělesa - mechanický klid.

3. Podle pohyblivosti.

Pohyblivost vyjadřuje omezení pohybu soustavy stykovými vazbami. Tělesa soustavy se mohou vzhledem k základnímu tělesu různým způsobem pohybovat. Struktura pohybu jednotlivých těles soustavy tvoří její pohyblivost. U soustav těles je třeba rozlišovat. Vnější pohyblivost - pohyblivost soustavy jako celku vzhledem k základnímu tělesu. Vnitřní pohyblivost - pohyblivost jednotlivých těles soustavy vzhledem k ostatním tělesům soustavy.

Pohyblivost soustavy má proto vždy dvě stránky, vnější a vnitřní, což vytváří složitou strukturu pohyblivosti soustav těles. Ve staticce se omezíme na rozlišování dvou základních typů soustav podle pohyblivosti. Jsou to:

Soustava nepohyblivá - soustava, která je jako celek vzhledem k základnímu tělesu v klidu a také každé těleso soustavy je v klidu. Nepohyblivá soustava je soustava těles, která je vnitřně i vnějškově nepohyblivá.

Soustava a všechna tělesa v klidu \implies soustava nepohyblivá

Soustava je v klidu \iff Soustava jako celek a všechna tělesa jsou v klidu.

Mechanismus - soustava, která je jako celek vázaná k základnímu tělesu nepohyblivě, ale tělesa soustavy jsou vzájemně uložena pohyblivě. Mechanismus obsahuje členy, jejichž pohyb je určený, členy jejichž pohyb je určitý a členy, které zprostředkovávají pohyb mezi členy s určeným a požadovaným pohybem. Členy s určeným pohybem nazýváme **hnací** a členy s požadovaným pohybem **hnané**.

4. Podle konfigurace těles

Základní typy seskupení soustav z binárních členů (tělesa vázaná pouze dvěma vazbami) jsou tyto:

Otevřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž pouze jeden člen je vázán k základnímu tělesu. Viz obr. 81a

Vně uzavřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž dvě tělesa jsou vázaná se základním tělesem. Viz obr. 81b

Vnitřně uzavřená soustava - soustava skládající se z binárních členů, přičemž žádný člen není vázán k základnímu tělesu a soustava tvoří uzavřený obrazec. Viz obr. 81c.

Ostatní soustavy jsou kombinací uvedených soustav s tím, že některé členy jsou ternární nebo vícenásobné. Viz odst. 9.2.



Obr. 81

5. Podle statické rovnováhy.

Toto hledisko je ve staticce zásadní. V odst. 8.1 jsme objasnili pojem statická rovnováha jednoho tělesa vázaného k základnímu tělesu, jak z hlediska silového, tak pohybového. Z pohybového hlediska výrok "těleso je ve statické rovnováze" znamená, že těleso je v mechanickém klidu, tedy stykové výslednice nejsou ovlivněny změnami polohy tělesa.

U soustav těles musíme rozlišovat pohyb a stykové výslednice

vnější - pohyb soustavy jako celku vzhledem k základnímu tělesu.

- stykové výslednice po uvolnění soustavy od základního tělesa

vnitřní - vzájemný pohyb těles

- stykové výslednice mezi tělesy

U soustav těles rozlišujeme statickou rovnováhu:

vnější - soustava jako celek je ve statické rovnováze, jednotlivá tělesa ve statické rovnováze být nemusí.

vnitřní - jednotlivá tělesa jsou ve statické rovnováze

podmíněnou - soustava jako celek i všechna tělesa jsou ve statické rovnováze. Je-li soustava v podmíněné statické rovnováze, pak platí následující relace.

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze	\iff	Všechna tělesa soustavy jsou ve statické rovnováze
--	--------	--

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze	\iff	Soustava těles je ve statické rovnováze vnější i vnitřní
--	--------	--

Nepodmíněná statická rovnováha - vnější i vnitřní statická rovnováha jsou na sobě nezávislé.

Řízená statická rovnováha - vnitřní a vnější statická rovnováha soustavy jsou na sobě závislé, přičemž jedna je řídicí a druhá řízená.

O uvedených typech statické rovnováhy soustav těles je třeba mít zcela jasnou představu, kterou popíšeme na chování automobilu, jehož vlastnosti z hlediska popisu typů statické rovnováhy všichni z každodenní praxe známe. Představme si následující situace.

- a) Automobil stojí se zařazeným rychlostním stupněm a nepohybuje se \implies motor je v klidu, žádná část motoru se nepohybuje \implies nepohybuje-li se auto, nepohybují se části motoru a opačně, nepohybují-li se části motoru, nepohybuje se automobil \implies soustava i její části jsou v **podmíněné statické rovnováze**.
- b) Automobil se zařazeným rychlostním stupněm, rozepnutou spojkou a motorem v chodu. Pohyblivé části motoru nejsou ve statické rovnováze, ale na řidičovi závisí, zda automobil jako celek bude vzhledem k základnímu tělesu ve statické rovnováze - **řízená statická rovnováha**.
- c) Automobil s vyřazeným rychlostním stupněm (jiná soustava), který je jako celek v klidu, ale jednotlivé části motoru se pohybují. Soustava je ve vnější statické rovnováze, ale podmínky vnitřní statické rovnováhy nejsou splněny, přičemž vnější a vnitřní statická rovnováha soustavy jsou **nepodmíněné**.

Jak vyplývá z uvedeného příkladu u technických soustav se můžeme setkat se všemi typy statické rovnováhy. V případě nepodmíněné statické rovnováhy je nutné vyšetřovat vnější a vnitřní statickou rovnováhu samostatně. U řízených soustav je nutné určit stavy, ve kterých nastává buď podmíněná nebo nepodmíněná statická rovnováha. Samostatným případem je rovnováha živých organismů, tou se však v mechanice těles strojního zaměření nezabýváme.

Ve staticce se u soustav těles zaměříme na nejjednodušší typ statické rovnováhy a tou je **podmíněná statická rovnováha**. V podmíněné statické rovnováze jsou všechny nepohyblivé soustavy, protože pro nepohyblivou soustavu platí relace: Nepohyblivá soustava \iff soustava jako celek a každé těleso soustavy jsou v klidu.

Dále zavedeme následující úmluvu:

Pokud nebude řečeno jinak, budeme pod názvem statická rovnováha soustavy těles rozumět podmíněnou statickou rovnováhu.

Pro podmíněnou statickou rovnováhu soustavy těles platí:

Soustava těles je v podmíněné statické rovnováze tehdy a jen tehdy, je-li každé těleso soustavy ve statické rovnováze.

Ve staticce budeme téměř výhradně rozlišovat jen:

- a) Soustavy těles ve statické rovnováze t.j. podmíněné.
- b) Nerovnovážné soustavy těles - t.j. soustavy, u kterých není ve statické rovnováze alespoň jedno těleso nebo soustava jako celek, případně obojí.

Již u jednoho tělesa jsme ukázali, že uložení může být normální nebo výjimečné, podle posloupnosti omezování složek pohybu tělesa jako celku a deformačních parametrů stykovými vazbami.

Totéž platí i pro soustavy těles, proto budeme rozlišovat:

Normální soustavy těles - stykové vazby nejprve omezují složky pohybu jako celku a pak deformační parametry.

Výjimečné soustavy těles - u výjimečných soustav dochází k omezování deformačních parametrů dříve, než byly omezeny složky pohybu jako celku.

Soustavy těles lze rozlišovat podle celé řady dalších hledisek, která budou vymezována v dalších předmětech.

9.2 Pojmy vztahující se k soustavám těles.

V tomto odstavci uvedeme v přehledu pojmy, které budeme používat ve statickém řešení soustav těles.

Člen soustavy - těleso nebo více těles vzájemně nepohyblivě spojených, které mají charakter tělesa.

Binární člen - těleso vázané k okolním tělesům dvěma vazbami. Viz obr. 82a

Ternární člen - těleso vázané k okolním tělesům třemi vazbami. Viz obr. 82b

Vícenásobný člen - těleso, které je k okolním tělesům vázáno větším počtem vazeb než třemi. Viz obr. 82c

Degenerovaný člen - spojovací těleso u vícenásobné rotační nebo sférické vazby

Hnací člen - člen mechanismu, jehož pohyb je řídicí

Hnaný člen - člen mechanismu, jehož pohyb je řízený

Základní prvek soustavy - těleso

Prvek soustavy - těleso nebo libovolná podsoustava, která má charakter tělesa.

Vnitřní vazba - vazba mezi tělesy, z nichž žádné není základním tělesem. Obr. 82e

Vnější vazba - vazba mezi tělesy, přičemž jedno těleso je základním tělesem. Obr. 82e

Vícenásobná vazba - Realizace rotační resp. sférické vazby vyžaduje, aby v místech styku tělesa tvořila válcovou resp. kulovou plochu, přičemž z kinematického a silového hlediska je podstatný střed této plochy. Viz obr. 86. To umožňuje styk více než dvou těles jednou vazbou, zdvojení, ztrojení ... znásobení rotační resp. sférické vazby. Vícenásobná vazba může být realizována podle obr. 86a, ale také pomocí zvláštního válcového resp. kulového tělesa, jehož funkcí je realizace spojení těles. Takové těleso nazýváme styčnickovým tělesem nebo degenerovaný člen. Pozor při určování pohyblivosti a uvolňování degenerovaný člen způsobuje studentům velké potíže. Viz obr. 86b.

Počet stupňů volnosti soustavy těles - počet všech nezávislých složek pohybů tělesa jako celku, které mohou vykonávat jednotlivá tělesa soustavy. Je mírou pohyblivosti soustavy těles.

Zatížený člen - těleso, které je v silové interakci s okolím soustavy. Viz obr. 82d

Nezatížený člen - těleso, které není v silové interakci s okolím soustavy.

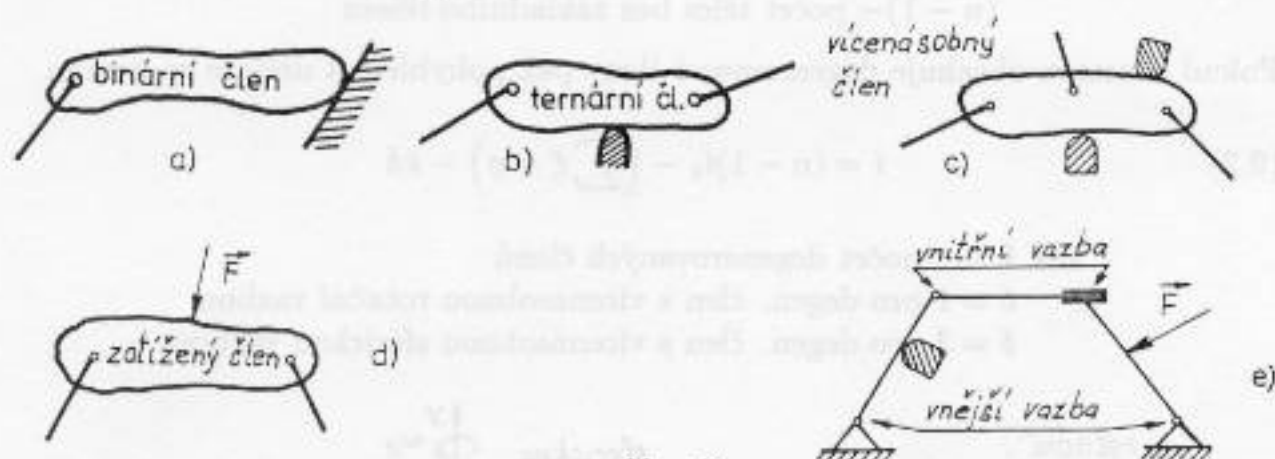
Statically nefunkční člen - těleso, jehož odstraněním se nezmění ani pohyblivost vyjádřená počtem stupňů volnosti, ani stykové výslednice mezi tělesy.

Uložení soustavy těles - soustava vazeb stykem, kterými je soustava těles vázaná k základnímu tělesu.

Statically určitá soustava těles - soustava těles, u které neznámé parametry stykových výslednic mezi tělesy můžeme určit z podmínek statické rovnováhy.

Statically neurčitá soustava těles - soustava těles, u které neznámé nezávislé parametry stykových výslednic nemůžeme určit jen z podmínek statické rovnováhy.

Výjimečná soustava těles - pohyblivá soustava těles s omezenými deformačními parametry.



Obr. 82

9.3 Statické řešení soustav těles vázaných stykovými vazbami typu NNTN.

Obdobně jako u jednoho vázaného tělesa můžeme úlohy o soustavách těles rozdělit na analýzu a syntézu, přičemž základní z hlediska tvorby technických děl je úloha na syntézu, která v počáteční fázi obsahuje tvůrčí práci. Řešení zpravidla víceznačné úlohy na syntézu vyžaduje dokonalé zvládnutí úlohy na analýzu. V první fázi se zaměříme na řešení podmíněné statické rovnováhy úplně zadané soustavy těles.

Řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles je principiálně stejné s řešením statické rovnováhy jednoho vázaného tělesa a obsahuje tyto základní kroky:

- 1) Určení pohyblivosti soustavy těles
- 2) Uvolnění těles soustavy
- 3) Kontrolu nutné podmínky statické určitosti
- 4) Sestavení podmínek statické rovnováhy a jejich řešení
- 5) Rozbor výsledků řešení

Dříve než uvedeme algoritmus řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles, budeme se zabývat odlišnostmi jednotlivých kroků oproti řešení jednoho vázaného tělesa.

ad 1) **Určení pohyblivosti** složitých nebo výjimečných soustav těles vyžaduje samostatné kinematické řešení, proto ve staticce nelze analyzovat výjimekové soustavy. Výjimekovost soustavy těles lze pouze konstatovat na základě rozboru statických rovnic. Pohyblivost normální soustavy bez degenerovaných těles určíme ze vztahu

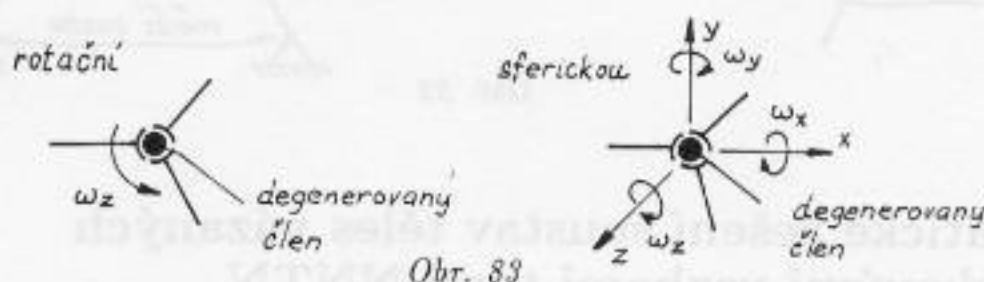
$$(9.1) \quad i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi - \eta \right)$$

kde: i – počet stupňů volnosti soustavy
 η – počet omezených deformačních parametrů
 i_v – počet stupňů volnosti volného tělesa
 $\sum \xi_i$ – počet stupňů volnosti odebraných vazbami
 $(n - 1)$ – počet těles bez základního tělesa

Pokud soustava obsahuje degenerované členy pak pohyblivost určíme ze vztahu

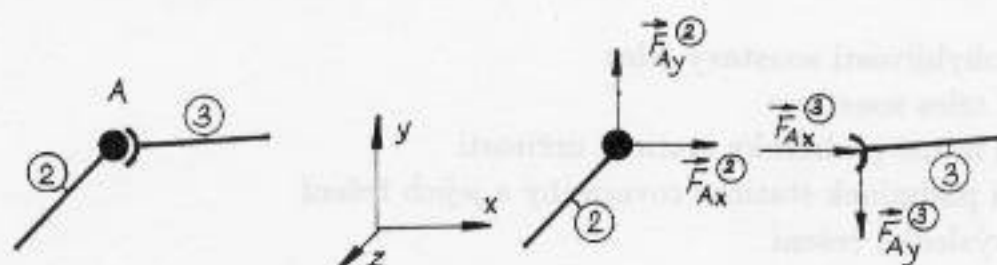
$$(9.2) \quad i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi - \eta \right) - k\delta$$

kde k – počet degenerovaných členů
 $\delta = 1$ pro degen. člen s vícenásobnou rotační vazbou
 $\delta = 3$ pro degen. člen s vícenásobnou sférickou vazbou



Válcové resp. kulové degenerované těleso má vždy 1 resp. 3 volnosti, které neovlivní pohyblivost soustavy, proto je musíme při určování stupňů volnosti soustavy odečíst.

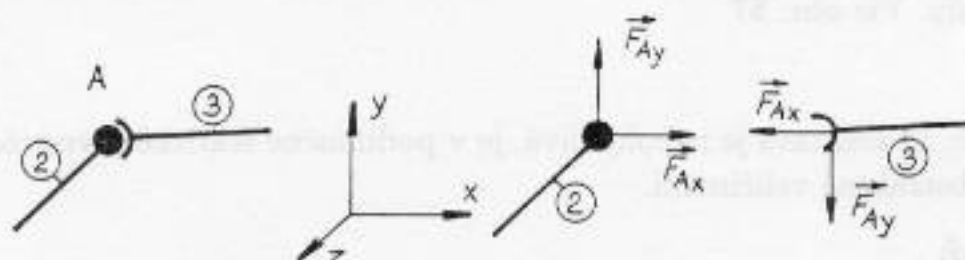
ad 2) **Uvolnění těles soustavy.** Jestliže uvolňujeme vázané těleso od základního tělesa neurčujeme silové výslednice působící na základní těleso. Uvolňujeme-li dvě tělesa soustavy musíme určit výsledné silové působení na obě tělesa, přičemž můžeme postupovat dvěma způsoby.



1. Oddělíme tělesa, silové působení vyjádříme neúplně určenými výslednými stykovými silami, přičemž smysl sil na obou tělesech libovolně zvolíme. Viz obr. 84. Princip akce a reakce zajistíme doplněním podmínek statické rovnováhy vztahy:

$$F_{Ax}^2 = -F_{Ax}^3 \text{ a } F_{Ay}^2 = -F_{Ay}^3.$$

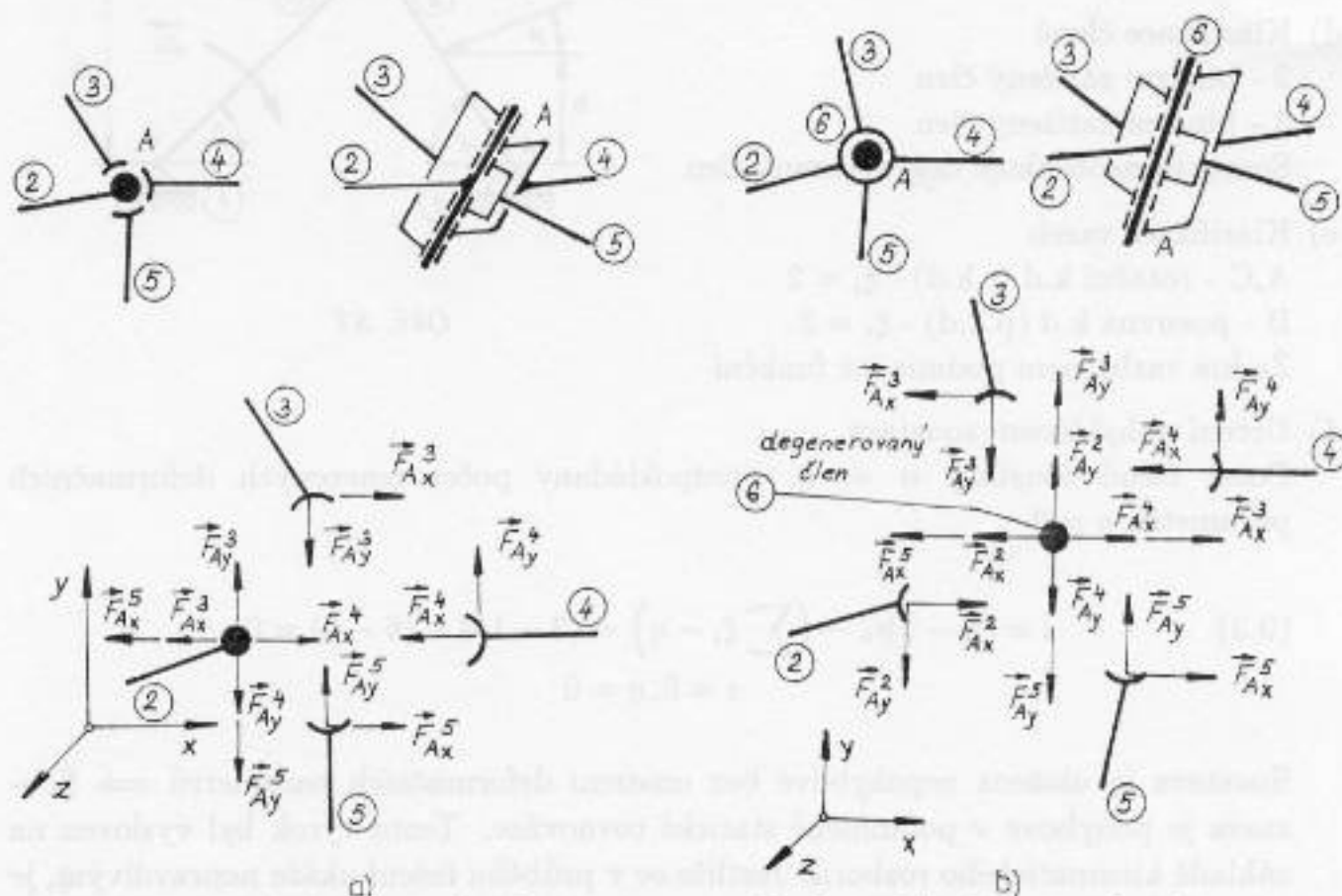
2. Uvolňování s uvažováním principu akce a reakce, viz obr. 85.



Obr. 85

Oddělíme tělesa, smysl výsledných stykových sil na prvním tělese zvolíme, na druhé těleso v důsledku principu akce a reakce působí síly s opačným smyslem.

Uvolňování vícenásobné rotační vazby. Uvolnění provedeme pro trojnásobnou rotační vazbu. Vícenásobná rotační vazba může být realizována dvojím způsobem, viz obr. 86.



Vazba odnímá 6 stupňů volnosti
a není realizovaná degenerovaným
tělesem

Vazba odnímá 8 stupňů volnosti
a je realizovaná degenerovaným
tělesem, proto $\delta = 1$

Obr. 86

Algoritmus řešení podmíněné statické rovnováhy soustav těles popíšeme na konkrétní úloze.

Zadání:

Soustava těles podle obrázku má být nepohyblivá staticky určitá. Zkontrolujte podmínky zadání a v případě, že jsou splněny, určete výpočtovým způsobem výsledné stykové síly. Viz obr. 87

Zamyšlení:

V případě, že soustava je nepohyblivá, je v podmíněné statické rovnováze. Úloha je zadaná abstraktně veličinami.

Rozbor zadání:

- a) Z hlediska úplnosti a správnosti.

Soustava je zadána obecně. Geometrie soustavy, vazby a silové prvky \vec{F} , \vec{M} jsou zadány úplně a správně.

- b) Z hlediska prostorového uspořádání soustavy.

Úloha je zadaná jako rovinná.

- c) Volba označení - viz obr. 87

- d) Klasifikace členů

2 - binární zatížený člen

3 - binární zatížený člen

Soustava neobsahuje degenerovaný člen

- e) Klasifikace vazeb

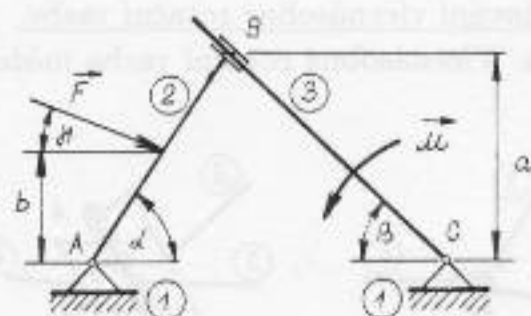
A, C - rotační k.d (r.k.d) - $\xi_i = 2$

B - posuvná k.d (p.k.d) - $\xi_i = 2$

Žádná vazba není podmíněně funkční

- f) Určení pohyblivosti soustavy

Počet členů soustavy $n = 3$, předpokládaný počet omezených deformačních parametrů $\eta = 0$.



Obr. 87

$$(9.3) \quad i = (n - 1)i_v - \left(\sum \xi_i - \eta \right) = (3 - 1)3 - (6 - 0) = 0$$

$$i = 0, \eta = 0$$

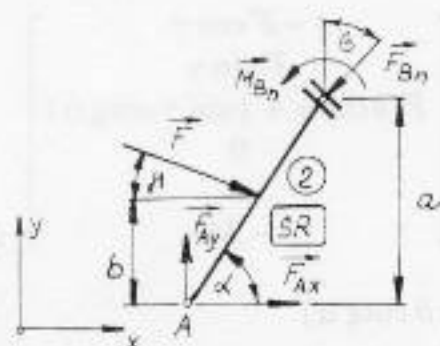
Soustava je uložena nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů \Rightarrow Soustava je pohybově v podmíněné statické rovnováze. Tento výrok byl vysloven na základě kinematického rozboru. Jestliže se v průběhu řešení ukáže nepravdivým, je to způsobeno tím, že do rozboru jsme nezahrnuli všechny podstatné parametry.

Body d), e), f) tvoří kinematický rozbor.

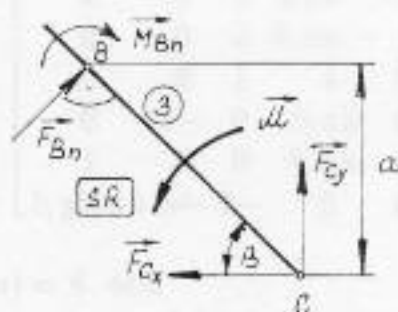
Řešení:

- b) Uvolnění jednotlivých členů soustavy. Členy uvolňujeme s respektováním principu

akce a reakce.



Obr. 88



c) Statický rozbor

I. Určení soustavy úplně zadaných a neúplně určených silových prvků a množiny neznámých nezávislých parametrů.

$$\begin{aligned}\pi &= \{\vec{F}, \vec{M}\} & \pi_R &= \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{M}_B, \vec{F}_C\} \\ NP &= \{F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Bn}, M_{Bn}, F_{Cx}, F_{Cy}\} \\ \mu_F &= 5, & \mu_M &= 1, & \mu &= 6\end{aligned}$$

II. Určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy

π_{ν_2}, π_{ν_3} – rovinné obecné soustavy \Rightarrow

$$\nu_i = 3 \quad \nu = \sum \nu_i = 6; \quad \nu_F = 4; \quad \nu_M = 2$$

III. Ověření nutné podmínky statické určitosti

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \nu \\ 6 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mu_M + \mu_r \leq \nu_M \\ 2 + 0 < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Nutná podmínka statické určitosti} \\ \text{je splněna, má smysl pokračovat} \\ \text{ve statickém řešení} \end{array}$$

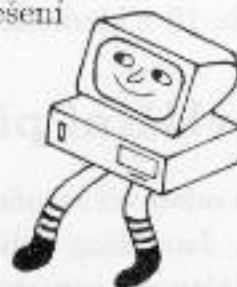
d) Sestavení podmínek statické rovnováhy:

Těleso 2

$$\begin{aligned}F_x &: F_{Ax} - F_{Bn} \sin \beta + F \cos \gamma = 0 \\ F_y &: F_{Ay} - F_{Bn} \cos \beta - F \sin \gamma = 0 \\ M_{xA} &: -F \cos \gamma b - F \sin \gamma b \cotg \alpha + M_{Bn} + F_{Bn} \sin \beta a - F_{Bn} \cos \beta a \cotg \alpha = 0\end{aligned}$$

Těleso 3

$$\begin{aligned}F_x &: -F_{Cx} + F_{Bn} \sin \beta = 0 \\ F_y &: F_{Cy} + F_{Bn} \cos \beta = 0 \\ M_{zB} &: M - M_{Bn} - F_{Cx} a + F_{Cy} a \cotg \beta = 0\end{aligned}$$



Maticový zápis soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \beta & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a & a \cotg \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Bn} \\ M_{Bn} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \cos \gamma \\ F \sin \gamma \\ F(b \cos \gamma + b \sin \gamma \cotg \alpha) \\ 0 \\ 0 \\ -\mathcal{M} \end{bmatrix}$$

$$\text{kde } k = (a \sin \beta - a \cos \beta \cotg \alpha)$$

e) Řešení soustavy statických rovnic

f) Rozbor řešení:

Je-li soustava zadána číselnými veličinami, pak je nutné provést rozbor výsledků řešení.

Z hlediska statiky je úloha ukončena, je-li nalezeno řešení neznámých nezávislých parametrů, což lze provést v případech, kdy úloha je staticky určitá. Ostatní případy vyžadují širší znalosti (kinematiky, dynamiky, numerické matematiky, pružnosti pevnosti a informatiky) a je možné je analyzovat až ve vyšších ročnících studia.

Poznámka:

- 1) Určujeme-li pohyblivost soustavy pomocí vztahu $i = (n-1)i_v - (\sum \xi_i - \eta)$, je nutné si uvědomit, že tento vztah určuje pohyblivost soustavy globálně. Jestliže soustava se skládá z pohyblivé podsoustavy s jedním stupněm volnosti a podsoustavy s jedním omezeným deformačním parametrem, pak výsledná pohyblivost soustavy určená uvedeným vztahem je $i = 0, \eta = 0$. Chybu poznáme rozбором soustavy statických rovnic.
- 2) U soustavy těles je silové působení přiřazeno tělesu a nelze je přiřadit jinému tělesu. Působí-li síla \vec{F} na těleso 2, nemůžeme ji posunout na těleso 3.

U zkoušky ze statiky je u výpočtového řešení soustavy těles postačující sestavení statických rovnic, jejich hodnocení z hlediska lineárnosti a úvahy o možných problémech počítačového řešení v návaznosti na znalosti matematiky a programování.

Konkrétní řešení statické rovnováhy soustav těles je v [2] úlohy A[85] - A[96] a v kapitole 10 z hlediska porovnání výpočtového a grafického řešení soustav těles.

9.4 Zvláštní případy soustav těles

V tomto odstavci stručně uvedeme několik speciálních případů soustav těles ze statického hlediska. Jsou dány zvláštnosti soustavy statických rovnic, zvláštními požadavky na řešení nebo zvláštností samotné soustavy těles.

1. Soustavy částečně staticky určité.

Staticky neurčitou soustavu těles lze rozdělit na podsoustavu staticky neurčitou a podsoustavu staticky určitou, což se projeví tím, že soustavu statických rovnic můžeme rozdělit na dvě soustavy, přičemž jedna je řešitelná. Z množiny neznámých nezávislých parametrů můžeme určit alespoň některé prvky.

2. **Soustavu statických rovnic lze rozdělit na dílčí, samostatně řešitelné pod-soustavy.** Rozdělení může být výhodné při řešení úloh na malé výpočetní technice, není výhodné při řešení na počítačích.

3. **Vlastní rovnice statické rovnováhy u mechanismů.**

Jestliže u mechanismů ve statické rovnováze nás nezajímají stykové síly, ale jen vztahy mezi silovými prvky působícími na hnané a hnací těleso, je možné úpravami statických rovnic obdržet závislost mezi uvedenými veličinami. Tyto úpravy je možné v rozumném analytickém tvaru provádět pouze pro jednoduché soustavy těles.

9.5 Prutové soustavy

Prutové soustavy, kterými se budeme ve staticce zabývat, jsou nejjednodušší modelovou soustavou prutových a příhradových konstrukcí. Tuto nejjednodušší modelovou soustavu vymezíme souborem následujících předpokladů:

1) Vazby mezi tělesy jsou u prostorových úloh sférické kinematické dvojice a u rovinných úloh rotační kinematické dvojice, v obou případech typu NNTN. Viz obr. 89.

2) Jednotlivá tělesa jsou buď pruty nebo styčnicková tělesa.

Prutem ze statického hlediska rozumíme modelové těleso, které je jednoznačně určeno střednicí γ , která je spojnicí těžišť příčných průřezů. V prutových soustavách se omezíme na pruty přímé, t.j. takové, jejichž střednicí je přímka. V dalších předmětech mechaniky těles prutové předpoklady rozšíříme z hlediska dalších mechanických vlastností.

Styčnickové těleso spojuje dva a více prutů, přičemž středy sférických kinematických dvojic u prostorových úloh a středy rotačních kinematických dvojic u rovinných úloh splývají. Tento společný bod nazveme styčnickem. Viz obr. 89.

3) Okolí prutové soustavy působí silami pouze na styčnicková tělesa.

4) Uložení k základnímu tělesu je realizováno stykem ve styčnicku. U rovinných soustav rotační nebo obecnou kinematickou dvojicí a u prostorových soustav sférickou nebo obecnou kinematickou dvojicí.

5) Každý prut prutové soustavy je vázán prostřednictvím styčnickových těles minimálně ke dvěma jiným prutům tak, že pruty jsou nepohyblivé. Soustava prutů vytváří nepohyblivé prutové těleso.

Poznámka:

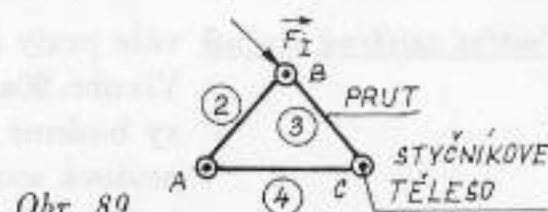
U prutových soustav zvolíme toto označení:

Základní těleso 1

Pruty 2 3 ...

Styčnicková tělesa (styčnický) budeme označovat A, B, C ... A, B, C - současně označují vazbu realizovanou styčnickem

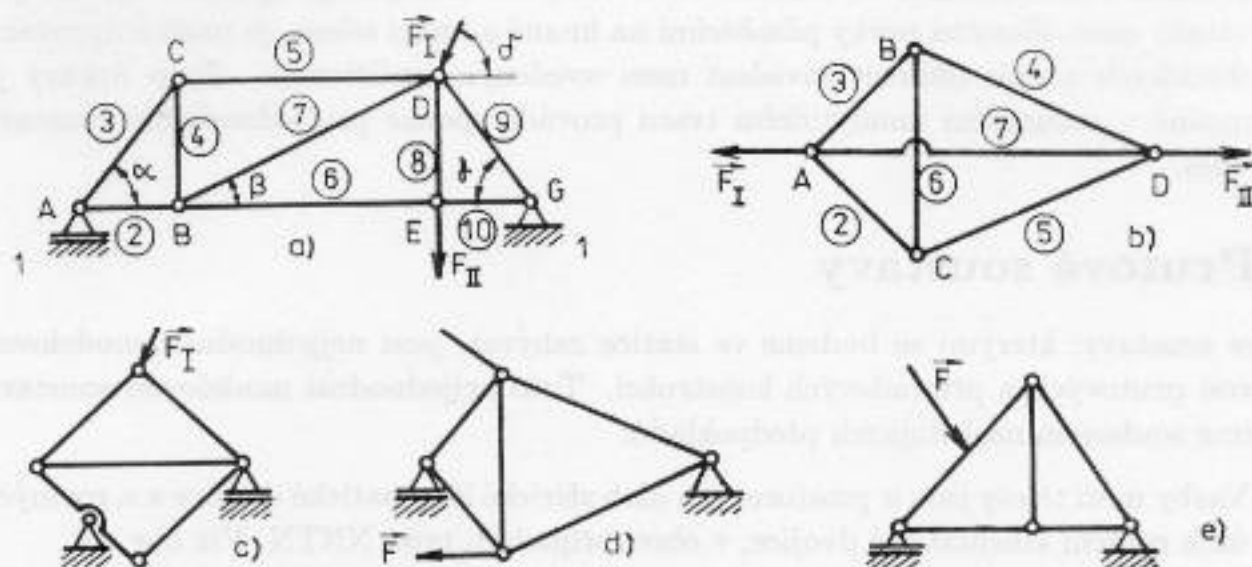
Úplně zadané silové prvky F_I, F_{II}, \dots



Obr. 89

Vnější stykové síly $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \dots$. Vnější stykové síly se vztahují ke kinematickým dvojicím, kterými je prutové těleso vázáno k základnímu tělesu.

Soustavy těles podle obr. 90 c, d, e nejsou prutové soustavy, protože u nich nejsou splněny prutové předpoklady.



Obr. 90

Vzhledem k tomu, že prut je ze statického hlediska reprezentován střednicí a styčnickové těleso styčnickem, znázorňujeme prut úsečkou a styčnickové těleso bodem.

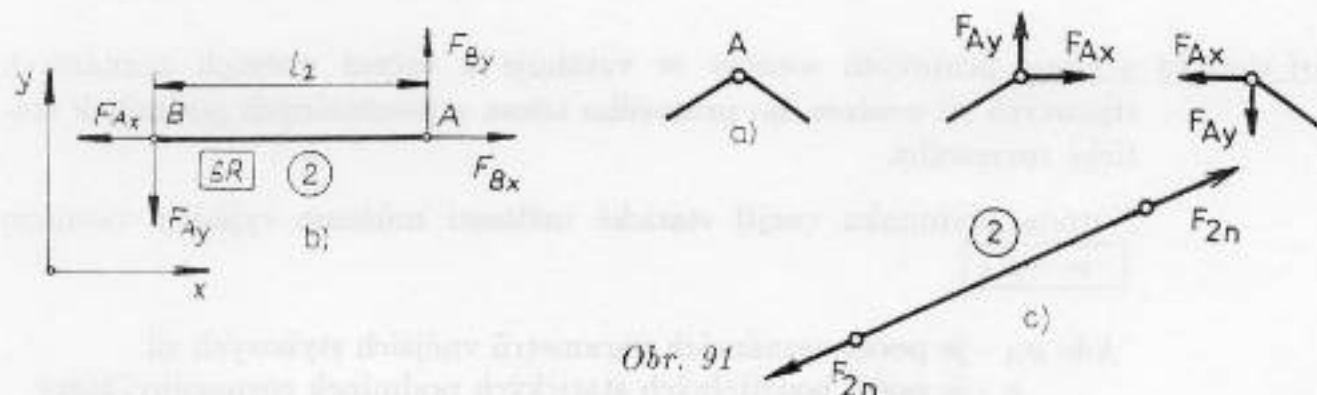
- Styčnický rozlišujeme - vnější
- vnitřní - zatížené
- nezatížené

Vnější styčnický je prutová soustava vázaná k základnímu tělesu. Viz obr. 90a styčnický A, G.

Vnitřní nezatížený styčnický váže pruty prutové soustavy. Viz obr. 90b styčnický B, C.

Vnitřní zatížený styčnický váže pruty prutové soustavy a působí v něm úplně určená síla. Viz obr. 90a styčnický D, E. Statickou rovnováhou prutové soustavy budeme rozumět **podmíněnou statickou rovnováhu**, t.z. prutová soustava je ve statické rovnováze, je-li každé těleso a každá podsoustava ve statické rovnováze.

Při uvolňování prutů budeme respektovat axiom o vzájemném působení stejným způsobem jako u soustav těles, t.j. uvolníme-li kinematickou dvojici, pak orientaci stykové síly působící na jedno těleso zvolíme a orientace stykové síly působící na druhé těleso je na základě principu akce a reakce opačná.



Obr. 91

Z uvolnění těles prutové soustavy, která je ve statické rovnováze a prutových předpokladů vyplývají tyto důsledky:

- z uvolnění prutu a podmínek statické rovnováhy vyplývá:

Podmínka SR prutu 2

$$\left. \begin{aligned} F_x : -F_{Ax} + F_{Bx} &= 0 \\ F_y : -F_{Ay} + F_{By} &= 0 \\ M_{zA} : F_{By} \cdot l_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} F_{Ax} &= F_{Bx} = F_2 \\ F_{By} &= F_{Ay} = 0 \end{aligned}$$

- **Prut přenáší pouze sílu v ose prutu**, která představuje jeden neznámý silový parametr. Viz obr. 91c. F_{2n} - souřadnice síly ve směru osy prutu. Obě stykové síly směřují buď do prutu nebo z prutu. Síly přenášené pruty nazveme prutovými silami.
- Zavedeme orientaci prutové síly vůči prutu takto: Prutovou sílu budeme označovat za kladnou, je-li orientována z prutového tělesa.
- Vzhledem k tomu, že uvolnění prutu je jednoduché, nebudeme uvolnění prutů graficky zobrazovat, ale budeme je provádět pouze v představě.
- Z uvolnění styčnickového tělesa (které je ze statického hlediska reprezentováno styčníkem) a podmínky statické rovnováhy vyplývá:
 - Soustava sil působících na styčník je prostorovou resp. rovinnou soustavou sil se společným působištěm.
 - U vnitřních styčníků známe z uvolnění prutů nositelky prutových sil působících na styčník a všechny parametry úplně zadaného zatížení. Při určování smyslu prutových sil respektujeme axiom o vzájemném působení.
 - U vnějších styčníků známe nositelky prutových sil a působiště (u sférické a rotační kinematické dvojice) resp. nositelku (u obecných kinematických dvojic) vnějších stykových sil.

Z prutového předpokladu 5 vyplývá: Po uvolnění prutové soustavy od základního tělesa obdržíme uvolněnou prutovou soustavu, kterou nazveme prutové těleso. Prvky prutového tělesa se vůči sobě nepohybují, prutová soustava tvoří nepohyblivé prutové těleso.

U prutových soustav rozlišujeme **vnější, vnitřní a celkovou statickou určitost**.

Vnější statická určitost prutových soustav se vztahuje k určení vnějších neznámých stykových sil uvolněného prutového tělesa z použitelných podmínek statické rovnováhy.

Nutnou podmínku vnější statické určitosti můžeme vyjádřit vztahem

$$\nu = \mu_A$$

kde μ_A - je počet neznámých parametrů vnějších stykových sil
 ν - je počet použitelných statických podmínek rovnováhy, který určíme z charakteru soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$ - sil působících na uvolněné prutové těleso, přičemž π - je soustava úplně zadáných silových prvků a π_R - je soustavou neúplně určených vnějších stykových sil.

Vnitřní statická určitost se vztahuje k určení sil v prutech. Uvolníme-li všechna tělesa prutové soustavy, přičemž pruty uvolníme podle obr. 91c, pak podmínky statické rovnováhy pro pruty jsou identicky splněné a použitelné statické podmínky určujeme z charakteru soustav sil působících na styčnicková tělesa. U prostorové resp. rovinné prutové soustavy působí na uvolněné styčnickové těleso prostorová resp. rovinná soustava sil se společným působišťem. Jestliže napíšeme pro všechna styčnicková tělesa použitelné podmínky statické rovnováhy, pak z těchto podmínek vhodnými algebraickými úpravami obdržíme podmínky statické rovnováhy prutového tělesa, t.j. že podmínky statické rovnováhy prutového tělesa jsou lineárně závislé se soustavou podmínek statické rovnováhy styčnicků. Proto počet všech použitelných podmínek statické rovnováhy pro prostorovou resp. rovinnou prutovou soustavu je $3k$ resp. $2k$ a podmínka vnitřní statické určitosti má tvar:

$$3k - 6 = p \quad - \text{pro prostorovou prutovou soustavu}$$

$$2k - 3 = p \quad - \text{pro rovinnou prutovou soustavu}$$

kde k - je počet styčnicků

p - počet prutů

$3k$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro prostorovou prutovou soustavu.

$2k$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro rovinnou prutovou soustavu.

$3k - 6$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro určení sil v prutech u prostorové prutové soustavy.

$2k - 3$ - počet použitelných podmínek statické rovnováhy pro určení sil v prutech u rovinné prutové soustavy.

Je-li $3k - 6 < p$ resp. $2k - 3 < p$, pak prutová soustava obsahuje více prutů a tím i více neznámých prutových sil, než jsme schopni ze statických podmínek určit.

Stupeň vnitřní statické neurčitosti pak určíme ze vztahu:

$$s = p - (3k - 6) \text{ resp. } s = p - (2k - 3)$$

Tvoří-li pruty prutové soustavy trojúhelníkové obrazce, pak je prutová soustava vždy vnitřně staticky určitá.

Celková statická určitost prutových soustav se vztahuje k určení všech neznámých nezávislých parametrů prutové soustavy z použitelných podmínek statické rovnováhy. Obecně vyjádřená nutná podmínka celkové statické určitosti má tvar $\nu = \mu$. Z rozboru vnitřní a vnější statické určitosti je zřejmé, že celkovou podmínku statické určitosti můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$3k = p + \mu_A \quad - \text{ pro prostorovou prutovou soustavu}$$

$$2k = p + \mu_A \quad - \text{ pro rovinou prutovou soustavu}$$

Postup řešení statické rovnováhy prutových soustav. Prutové soustavy z hlediska tvorby technických děl mají historicky velký význam. Teorie prutových soustav je podrobně propracovaná a studenti v literatuře mohou nalézt řadu specifických metod pro konkrétní prutové soustavy. Např. v [3] str. 145 - 155. My se dále omezíme pouze na dvě základní metody.

- a) **Obecná styčnicková metoda** spočívá v uvolnění všech styčníků a sestavení použitelných podmínek statické rovnováhy, které vytvářejí soustavu lineárních algebraických rovnic, kterou můžeme zapsat maticovou rovnicí

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (9.3)$$

kde \mathbf{A} – je matice soustavy, která popisuje prutovou soustavu geometricky
 \mathbf{x} – sloupcová matice neznámých parametrů
 \mathbf{b} – sloupcová matice úplně zadaných silových prvků.

V praxi soustavu algebraických lineárních rovnic (9.3) řešíme na počítači. Software na řešení soustavy algebraických lineárních rovnic dnes patří k vybavení programovatelných kalkulaček. Proto dnes v praxi převládá obecná styčnicková metoda. Po vyřešení neznámých parametrů musíme provést rozbor výsledků řešení.

- b) **Postupná styčnicková metoda** spočívá v postupném uvolňování staticky určitě vázaných styčníků v dané fázi řešení. Pořadí styčníků pak není libovolné, ale je dáno podmínkou, že na uvolněný styčník působí kromě úplně určených silových prvků neúplně určené silové prvky pouze se 3 neznámými parametry u prostorové resp. se 2 neznámými parametry u rovinné prutové soustavy. Není-li v dané fázi řešení u prutové soustavy staticky určitě vázaný styčník, pak v řešení můžeme pokračovat, podaří-li se nám určit některý z neznámých parametrů na základě uvolnění pod-soustavy. To se nám vždy podařit nemusí a pak je nejjednodušší použít obecnou styčnickovou metodu.

Kapitola 10.0

Grafické řešení statických úloh

10.1 Základní věty grafického řešení

Vedle řešení výpočtem lze některé úlohy o statické rovnováze a ekvivalenci řešit graficky. V tomto odstavci uvedeme základní grafické metody. Postup pro výpočtové řešení statických úloh je uveden na str. 121. Kroky, ve kterých se výpočtový a grafický způsob řešení odlišují, jsou d - f na str. 123. Pro grafické řešení mají tento obsah:

- d) Grafické zobrazení zadaných číselných veličin. Zadané číselné veličiny jsou silové a rozměrové. Tyto veličiny musíme jednoznačně zobrazit grafickými veličinami. Toto zobrazení je charakteristické měřítkem, jehož rozměr je odvozen z rozměru zobrazované veličiny.

Měřítko budeme zapisovat ve tvaru:

$$\begin{aligned} 1\text{mm} &\cong 5\text{N}, \text{ čteme } 1\text{mm} \text{ odpovídá } 5\text{N} \\ 1\text{mm} &\cong 0.1\text{m}, \text{ čteme } 1\text{mm} \text{ odpovídá } 0.1\text{m} \end{aligned}$$

Grafická konstrukce, u které nejsou uvedena měřítko, neposkytuje kvantitativní údaje o řešeném problému.

- e) Nakreslení geometrického obrazce zadaných veličin v daném zobrazení.
- f) Realizace grafické konstrukce. Grafická konstrukce se nejčastěji skládá z posloupnosti těchto operací. Sestrojení průsečíku dvou různoběžek, sestrojení přímky procházející dvěma body, sestrojení rovnoběžky s danou přímkou, sestrojení přímky procházející daným bodem rovnoběžně s danou přímkou, konstrukce trojúhelníka, sestrojení bodu ležícího na dané přímce v dané vzdálenosti od určeného bodu.
- g) Zpětné zobrazení grafických veličin na veličiny číselné.

Sestrojení grafické konstrukce vyžaduje technické prostředky, které dnes můžeme rozdělit do dvou skupin:

elementární - papír, tužka, pravítko, kružítko.

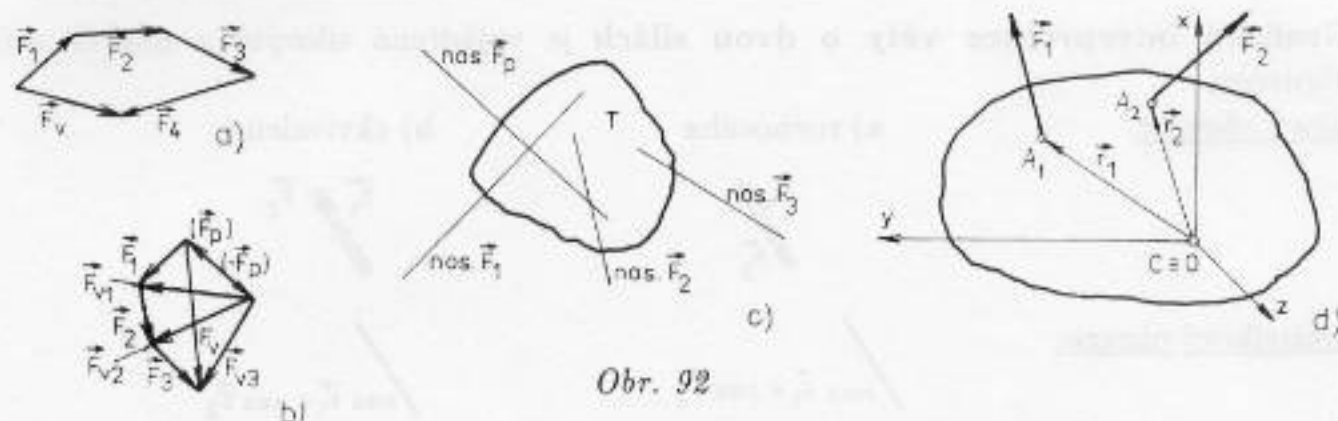
počítačové - počítač vybavený grafickým softwarem s patřičnými grafickými periferiemi.

V současné době je dominantní výpočtové řešení, proto se grafickým řešením budeme zabývat především z pedagogického hlediska se zaměřením na získání názorné představy, kterou grafické řešení poskytuje lépe než výpočtové. Graficky budeme řešit úlohy jednoduché, nevyžadující speciální grafické konstrukce s omezením na úlohy rovinné. Vzhledem k tomu, že technické prostředky počítačové interaktivní grafiky v současné době jsou ve výuce nedostupné, omezíme se na úlohy řešené tužkou, pravítkem a kružítkem na papíře. Grafické konstrukce, kterými se budeme zabývat, jsou založeny na jednoduchých geomet-

rických konstrukcích a větách o dvou a o třech silách a větě o superpozici.

Při grafických konstrukcích budeme používat následující pojmy:

- silový obrazec - silový n-úhelník jako zobecnění silového trojúhelníka viz obr. 92a
- silový obrazec s pomocnými silami viz obr. 92b
- nositelkový obrazec viz obr. 92c



Obr. 92

Věta o dvou silách

Nechť na těleso T působí dvě síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 určené $\{A_1, \vec{F}_1\}$ a $\{A_2, \vec{F}_2\}$, přičemž nejsou současně nulové např. $\vec{F}_1 \neq \vec{0}$. Viz obr. 92d. Ptáme se, kdy těleso T bude ve statické rovnováze nebo kdy působení síly \vec{F}_1 bude staticky ekvivalentní s působením síly \vec{F}_2 na těleso T . Z hlediska působení soustavy $\pi = \{\{A_1, \vec{F}_1\}, \{A_2, \vec{F}_2\}\}$ bude těleso ve statické rovnováze tehdy, bude-li soustava π rovnovážnou, resp. působení síly \vec{F}_1 na těleso T bude staticky ekvivalentní s působením \vec{F}_2 na těleso T , budou-li síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 staticky ekvivalentní. Působení sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 vyjádříme v libovolném, ale konkrétně zvoleném bodě C tělesa silovým bivektorem. Podle vztahu (6.17) budou síly tvořit rovnovážnou soustavu resp. budou staticky ekvivalentní, jestliže: ($\pi = \vec{F}_1 \cup \vec{F}_2$ - rovnovážná soustava - znaménko \mp , \vec{F}_1, \vec{F}_2 ekvivalentní síly - znaménko $-$)

$$\vec{F}_1 \pm \vec{F}_2 = \vec{0} \wedge \vec{M}_1 \pm \vec{M}_2 = \vec{0} \text{ ze silové podmínky vyplývá } \vec{F}_1 = \mp \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1; \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (\pm \vec{F}_1) \text{ tedy}$$

$$\vec{M}_1 \pm \vec{M}_2 = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) \pm (\vec{r}_2 \times (\mp \vec{F}_1)) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 = \mp \vec{F}_2 \rightarrow F_1 \vec{e}_{F_1} = F_2 (\mp \vec{e}_{F_2}) \rightarrow F_1 = F_2 \wedge \vec{e}_{F_1} = \mp \vec{e}_{F_2} = \delta \vec{e}_n \quad (10.1)$$

je-li $\vec{F}_1 \neq \vec{0}$ pak vztah $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{0}$ bude splněn pro

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \lambda \vec{e}_F) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \lambda \delta \vec{e}_n = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \lambda \vec{e}_n = \vec{0}$$

$$\text{tedy } \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \lambda \vec{e}_n, \text{ je-li } \vec{r}_1 = O\vec{A}_1, \vec{r}_2 = O\vec{A}_2 \quad (10.2)$$

pak body A_1, A_2 leží na společné nositelce

Na základě vztahů (10.1) a (10.2) můžeme slovně formulovat větu o dvou silách

Uvolněné těleso, na které působí dvě síly jako jediné silové prvky, je ve statické rovnováze tehdy a jen tehdy, jestliže obě síly leží na společné nositelce, jsou stejně veliké a opačně orientované.

Působení síly \vec{F}_1 na těleso T je staticky ekvivalentní s působením síly \vec{F}_2 tehdy a jen tehdy, když obě síly leží na společné nositelce, jsou stejně veliké a souhlasně orientované.

Grafická interpretace věty o dvou silách je vyjádřena silovým a nositelkovým obrazcem.

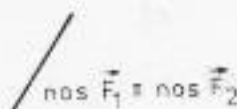
silový obrazec

a) rovnováha

b) ekvivalence



nositelkový obrazec



Věta o třech silách:

Věta o třech silách má dvě varianty. První varianta se týká nahrazení dvou sil z hlediska statické ekvivalence jedinou silou a druhá varianta věty pojednává o rovnováze uvolněného tělesa na které působí jako jediné silové prvky tři síly. Viz obr. 93 a 94.

Působení dvou sil \vec{F}_1, \vec{F}_2 , které jsou určeny $\{A_1, \vec{F}_1\}$ a $\{A_2, \vec{F}_2\}$, na těleso T je staticky ekvivalentní s působením síly \vec{F}_3 , je-li splněna podmínka statické ekvivalence, kterou můžeme podle (6.2) vyjádřit ve tvaru:

$$(10.3) \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 \wedge \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

Z podmínky statické ekvivalence s využitím znalostí vektorového počtu obdržíme

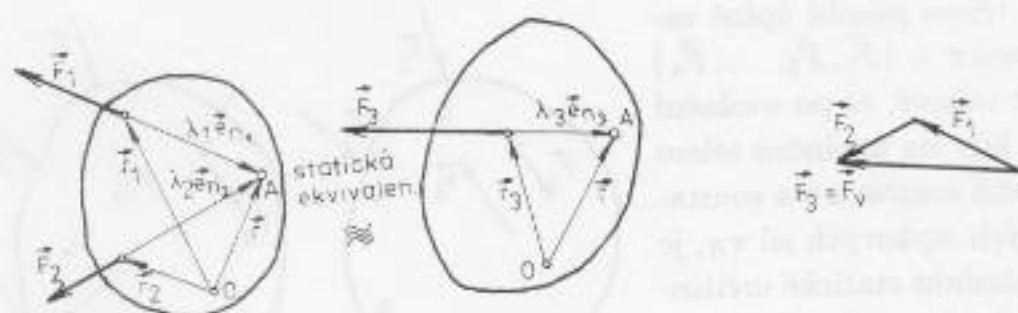
$$(10.4) \quad \begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 &= (\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_{n_1}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{e}_{n_2}) \times \vec{F}_2 \\ \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 &= (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) \times \vec{F}_3 = (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \end{aligned}$$

Z porovnání pravých stran předchozích rovnic vyplývá

$$(10.5) \quad (\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_{n_1}) = (\vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{e}_{n_2}) = (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) = \vec{r}$$

momentová podmínka je splněna tehdy, protínají-li se nositelky sil \vec{F}_1, \vec{F}_2 a \vec{F}_3 v jediném bodě. Sílu \vec{F}_3 , která je staticky ekvivalentní se silami \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , označíme \vec{F}_{ek} .

Grafická interpretace vztahu (10.3) je zřejmá ze silového obrazce a vztahu (10.4) z nositelkového obrazce.

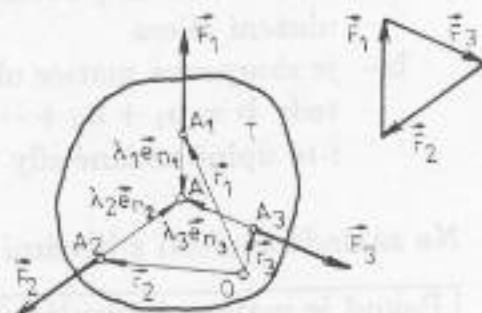


Obr. 93

Na základě grafické interpretace vztahů (10.3) a (10.4) můžeme slovně formulovat první variantu věty o třech silách.

Působení dvou sil na těleso je staticky ekvivalentní s působením jediné síly, kterou nazveme staticky ekvivalentní silou, tehdy a jen tehdy, jestliže síly leží v jedné rovině, jejich nositelky se protínají v jediném bodě a silový obrazec je uzavřen, přičemž smysl dvou sil je opačný než síly třetí.

Působí-li na uvolněné těleso tři síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 a \vec{F}_3 jako jediné silové prvky, pak těleso T bude ve statické rovnováze, budou-li síly \vec{F}_1, \vec{F}_2 a \vec{F}_3 tvořit rovnovážnou soustavu, což vyjádříme statickou podmínkou ve tvaru



Obr. 94

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \wedge \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{0} \quad (10.7)$$

na základě znalostí z vektorového počtu můžeme momentovou podmínku upravit na tvar

$$\begin{aligned} &(\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_{n_1}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{e}_{n_2}) \times \vec{F}_2 = \\ &= -(\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) \times \vec{F}_3 = (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) \times -(\vec{F}_3) = (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Odtud vyplývá:

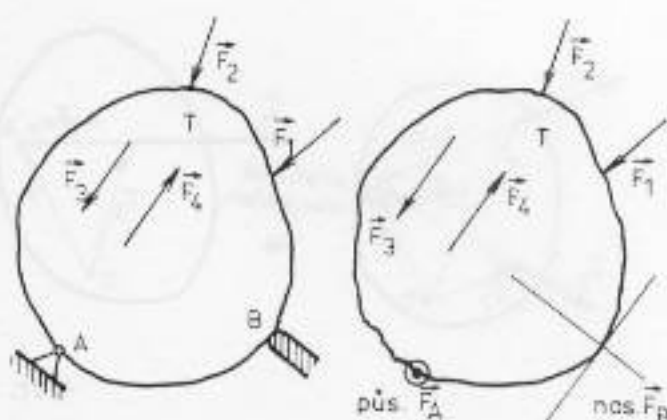
$$(\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{e}_{n_1}) = (\vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{e}_{n_2}) = (\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{e}_{n_3}) = \vec{r}$$

Nyní můžeme slovně formulovat druhou variantu věty o třech silách

Uvolněné těleso, na které působí tři síly jako jediné silové prvky je ve statické rovnováze tehdy a jen tehdy, jestliže síly leží v jedné rovině, jejich nositelky se protínají v jednom bodě a silový trojúhelník je uzavřen se šipkami v jednom smyslu.

Věta o superpozici

Nechť na vázané těleso působí úplně zadaná silová soustava $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ a uložení tělesa je takové, že po uvolnění stykových vazeb, kdy na uvolněné těleso působí úplně zadaná soustava π a soustava neúplně určených stykových sil π_R , je splněna nutná podmínka statické určitosti a soustava statických rovnic je lineární. Pak soustavu statických rovnic můžeme zapsat v maticovém tvaru rovnic:



Obr. 95

$$(10.6) \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

kde \mathbf{x} – je sloupcová matice neznámých parametrů (NP)

\mathbf{A} – matice soustavy rovnic, která charakterizuje z geometrického hlediska uložení tělesa

\mathbf{b} – je sloupcová matice obsahující součty souřadnic úplně zadané soustavy π , tedy $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n$, kde \mathbf{b}_i je sloupcový vektor souřadnic i -té úplně zadané síly \vec{F}_i .

Na základě znalostí z lineární algebry můžeme formulovat větu o superpozici:

Pokud je matice \mathbf{A} regulární, existuje řešení soustavy rovnic (10.6) a platí

$$\mathbf{x} = \sum \mathbf{x}_i = \sum \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_i = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_n)$$

$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_i$, je vektor stykových sil způsobený i -tým úplně zadaným silovým prvkem.

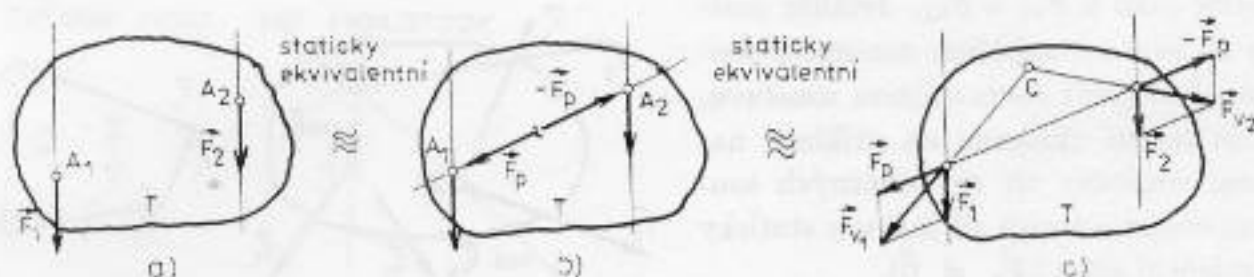
Protože věta o superpozici se využívá především při grafickém řešení, uvedeme její slovní formulaci pro grafické řešení.

Působí-li na těleso soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, a soustava neúplně určených stykových sil $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$, přičemž soustava statických rovnic je lineární, pak stykové síly soustavy π_R určíme jako výslednice dílčích stykových sil např. $\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{A_i}$, kde \vec{F}_{A_i} je dílčí styková síla ve vazbě A vyvolaná i -tou silou \vec{F}_i úplně zadané soustavy sil π .

10.2 Základní grafické konstrukce odvozené z vět o dvou a o třech silách a věty o superpozici.

Na základě věty o třech silách můžeme z hlediska statické ekvivalence nahradit dvě síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 působící na těleso jedinou staticky ekvivalentní silou \vec{F}_3 , jejíž nositelka prochází

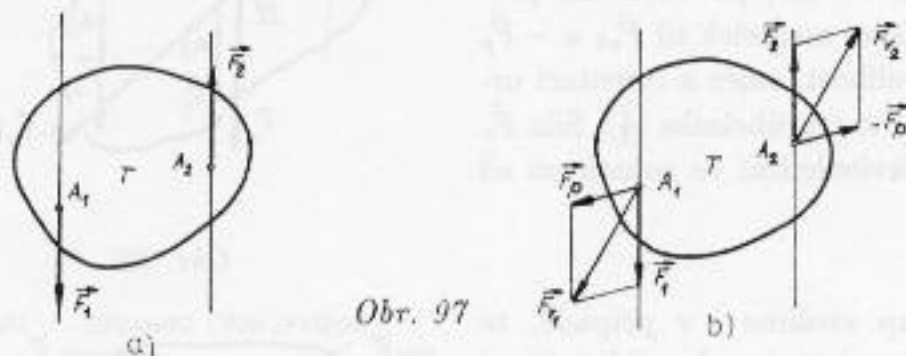
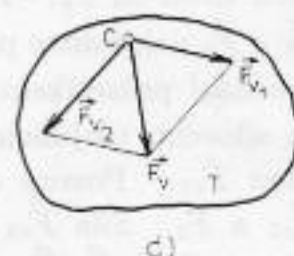
přísečíkem nositelek \vec{F}_1 a \vec{F}_2 . Pokud síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 jsou rovnoběžné, průsečík jejich nositelek je úběžný bod.



Obr. 96

Polohu nositelky síly \vec{F}_3 v tomto případě určíme takto:

K soustavě sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 připojíme rovnovážnou soustavu dvou sil \vec{F}_p a $-\vec{F}_p$ na společné nositelce, která protíná nositelky sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 . Na základě věty o třech silách nahradíme soustavu sil \vec{F}_1 a \vec{F}_p staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1} a síly $-\vec{F}_p$ a \vec{F}_2 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e2} . Další postup je zřejmý z obrázku 96. Pokud $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$ a nositelky jsou rovnoběžné, vytváří síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 silovou dvojici, která je podle odst. 5.3 jednoznačně určena \vec{M} . (Viz obr. 97)



Obr. 97

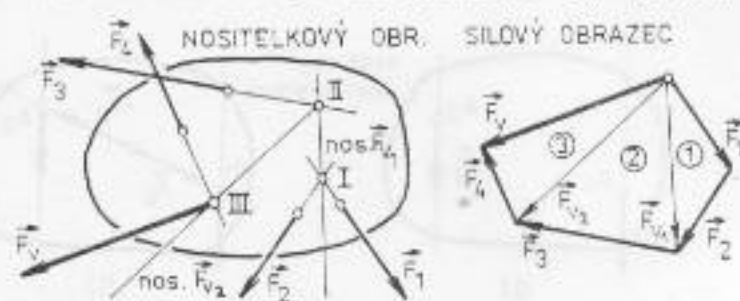
Pokud na těleso působí více sil a soustava je rovinná, můžeme na základě postupného nahrazování dvou sil staticky ekvivalentní silou původní silovou soustavu nahradit jedinou staticky ekvivalentní silou ($\vec{F}_e \neq \vec{0}$) nebo jedinou staticky ekvivalentní dvojicí ($\vec{F}_e = \vec{0}$). Při grafickém řešení určujeme velikost a orientaci staticky ekvivalentní síly v silovém obrazení a polohu ekvivalentní síly v samostatném silovém obrazení. Postup řešení si ukážeme na příkladě nahrazení soustavy čtyř různoběžných sil jedinou silou. Viz obr. 98 (Určení výslednice různoběžných sil).

Postup řešení:

Síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1} , jejíž velikost, směr nositelky a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ①. Nositelka podle věty o třech silách prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 (bod I). Obdobně nahradíme \vec{F}_{e1} a \vec{F}_3 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e2} , jejíž velikost, směr nositelky a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ② a nositelka musí procházet průsečíkem nositelek \vec{F}_3 a \vec{F}_{e1} (bod II). Síly \vec{F}_{e2} a \vec{F}_4 nahradíme

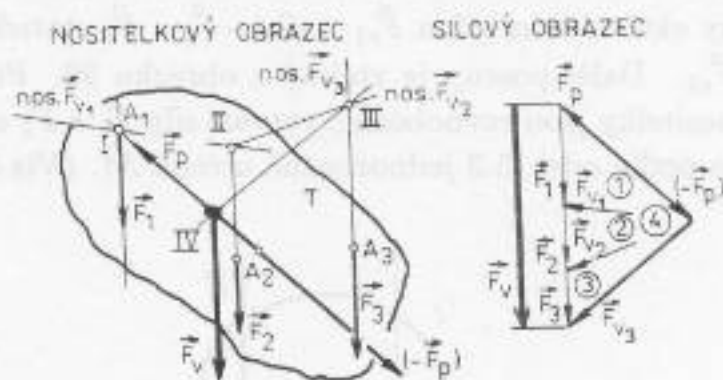
staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v , která je v důsledku postupného nahrazování staticky ekvivalentní se silami $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ a \vec{F}_4 . Velikost, orientaci a polohu nositelky \vec{F}_v určíme obdobně jako u \vec{F}_{v1} a \vec{F}_{v2} . Jestliže nositelky sil jsou rovnoběžné, musíme k soustavě sil připojit rovnovážnou soustavu. Postup řešení ukážeme na příkladě nahrazení soustavy tří rovnoběžných souhlasně orientovaných sil jedinou staticky ekvivalentní silou ($\vec{F}_v \neq \vec{0}$).

Viz obr. 99.



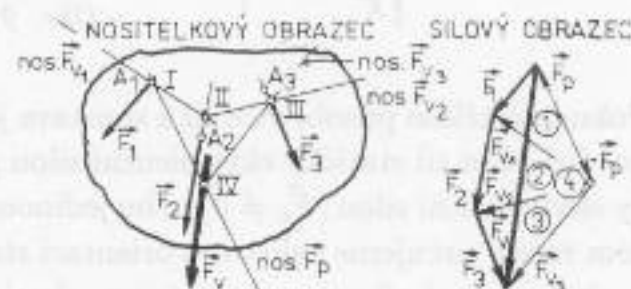
Obr. 98

Postup řešení: K soustavě tří rovnoběžných sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, připojíme rovnovážnou soustavu dvou sil $\vec{F}_p, -\vec{F}_p$ na společné nositelce, která protíná nositelky zadanych sil. Síly \vec{F}_1 a \vec{F}_p nahradíme podle věty o třech silách staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v1} , jejíž nositelka prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_1 a \vec{F}_p (bod I) a velikost, směr a orientace určíme ze silového trojúhelníka ①. Síly \vec{F}_{v1} a \vec{F}_2 obdobně nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{v2} . Postup opakujeme pro síly \vec{F}_{v2} a \vec{F}_3 . Síla \vec{F}_{v3} je staticky ekvivalentní silám $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ a \vec{F}_p . Na těleso působí síly \vec{F}_{v3} a $-\vec{F}_p$, které podle věty o třech silách nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v , jejíž nositelka prochází průsečíkem nositelek sil \vec{F}_{v3} a $-\vec{F}_p$ (bod IV) a velikost, směr a orientaci určíme ze silového trojúhelníka ④. Síla \vec{F}_v je staticky ekvivalentní se soustavou sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.



Obr. 99

Stejný postup zvolíme i v případě, že síly jsou různoběžné, ale úhly, které svírají nositelky jsou "malé" (průsečíky nositelek sil procházejí mimo papír). Postup řešení je stejný jako v předchozím případě a je zřejmý ze silového a nositelkového obrazce. Viz obr. 100.

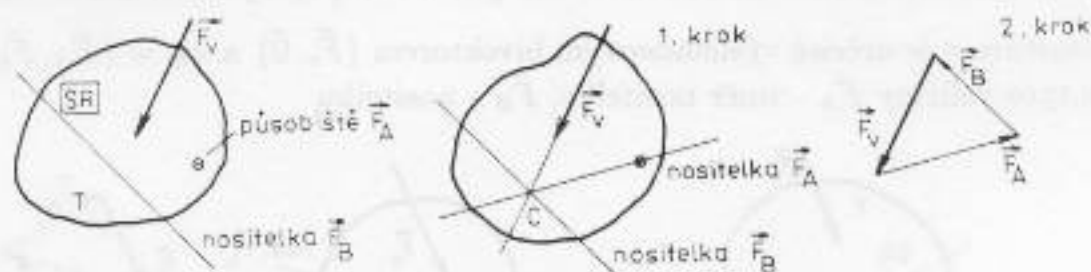


Obr. 100

V předchozích konstrukcích jsme řešili úlohy, kdy na těleso působila pouze soustava úplně zadanych silových prvků π . Dále se budeme zabývat konstrukcemi charakteristickými tím, že na těleso působí jak soustava úplně zadanych silových prvků, tak soustava neúplně určená.

1. Na těleso T, které je ve statické rovnováze, působí úplně určená soustava $\pi = \{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a neúplně určená soustava $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$, kde \vec{F}_A, \vec{F}_B jsou neúplně zadané silové prvky, pro které známe \vec{F}_A - působiště, \vec{F}_B - nositelku.

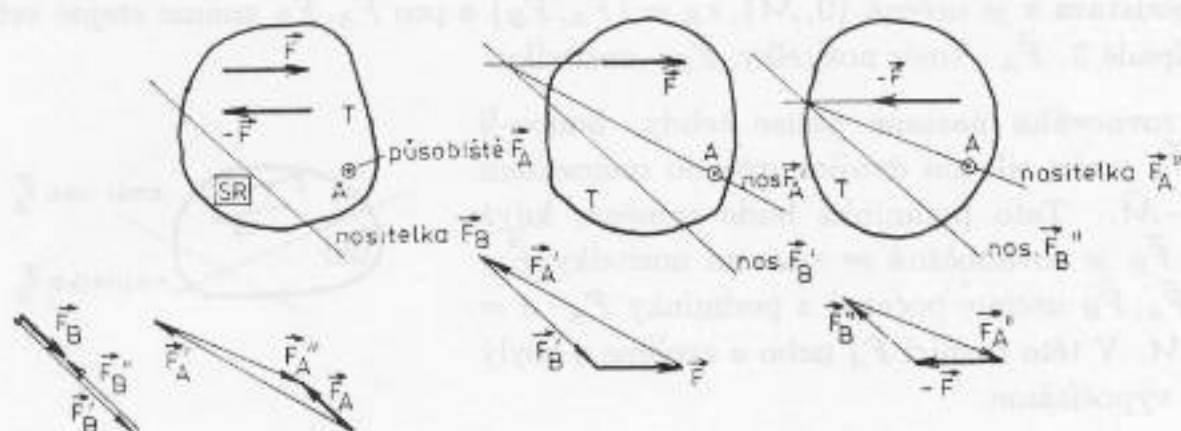
Je-li $\vec{F}_v \neq \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{0}$, pak na těleso působí tři síly $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_v$ a těleso je ve statické rovnováze.



Obr. 101

Podle věty o třech silách, nositelky \vec{F}_A, \vec{F}_B , a \vec{F}_v se protínají v jednom bodě a silový obrazec je uzavřen se šipkami v jednom smyslu. V prvním kroku řešení sestrojíme nositelky sil, které procházejí bodem C a v druhém kroku sestrojíme silový obrazec. Viz obr. 101.

2. Soustava π je točivá, určená \vec{M} a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ pro \vec{F}_A, \vec{F}_B stejně jako v předchozím případě známe \vec{F}_A - působíště, \vec{F}_B - nositelku. Těleso T je ve statické rovnováze.

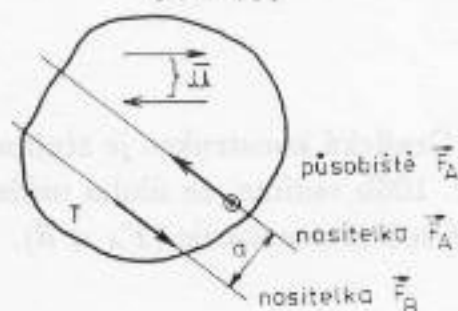


Obr. 102

Silová soustava π je jednoznačně určena momentem \vec{M} . Nejjednodušší silová soustava, která má vlastnosti π je silová dvojice. Síly \vec{F} a $-\vec{F}$ jsou stejně velké opačně orientované a leží na rovnoběžných nositelkách, jejichž vzdálenost určíme ze vztahu $d = \frac{M}{F}$, přičemž velikost F jsme zvolili. Úlohu řešíme superpozicí. Působí-li na těleso síla \vec{F} , určíme síly \vec{F}_A a \vec{F}_B podle věty o třech silách a označíme je \vec{F}'_A a \vec{F}'_B , viz úloha 1. Obdobně pro sílu $-\vec{F}$ vyřešíme síly \vec{F}''_A a \vec{F}''_B . Síla \vec{F}_A je výslednicí sil \vec{F}'_A a \vec{F}''_A a síla \vec{F}_B je výslednicí \vec{F}'_B a \vec{F}''_B .

Tuto úlohu můžeme výhodně řešit na základě následující úvahy. Soustava π působící na těleso je určena momentem \vec{M} . Podmínka statické rovnováhy bude splněna, budou-li síly \vec{F}_A a \vec{F}_B tvořit silovou dvojici, jejíž moment $\vec{M}_d = -\vec{M}$, tedy nositelka síly \vec{F}_A je rovnoběžná s nositelkou síly \vec{F}_B a prochází bodem A. Velikost síly \vec{F}_A a \vec{F}_B určíme početně ze vztahu $F_A = F_B = \frac{M}{a}$ a orientace sil \vec{F}_A, \vec{F}_B je daná podmínkou $\vec{M}_d = -\vec{M}$.

Obr. 103



Výhoda uvedeného graficko-početního řešení spočívá v tom, že je jednodušší než grafické řešení a zachovává názornost grafického řešení při určení polohy nositelek a orientace sil.

3. Soustava π je určena výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny \vec{F}_A - směr nositelky, \vec{F}_B - nositelku

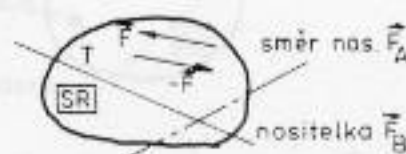


Obr. 104

Na těleso, které je ve statické rovnováze působí tři síly. Podle věty o třech silách se nositelky protínají v jediném bodě A. Další postup je stejný jako u 1 a zřejmý z obrázku 104.

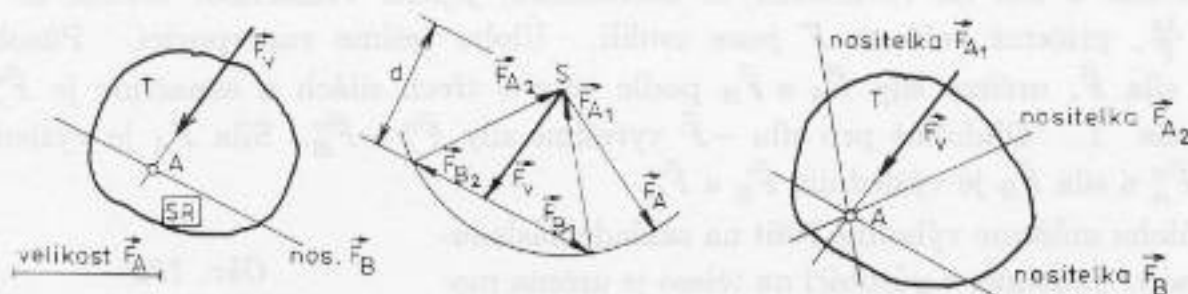
4. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$, $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ a pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe stejné veličiny jako v případě 3. \vec{F}_A - směr nositelky, \vec{F}_B - nositelku.

Statická rovnováha nastane pouze tehdy, budou-li síly \vec{F}_A, \vec{F}_B tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Tato podmínka bude splněna, když nositelka \vec{F}_B je rovnoběžná se směrem nositelky \vec{F}_A . Velikost \vec{F}_A, \vec{F}_B určíme poččetně z podmínky $F_A \cdot a = F_B \cdot a = M$. V této rovnici F_A nebo a zvolíme a zbylý parametr vypočítáme.



Obr. 105

5. Soustava π je určena $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$, $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ a pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A - velikost, \vec{F}_B - nositelku

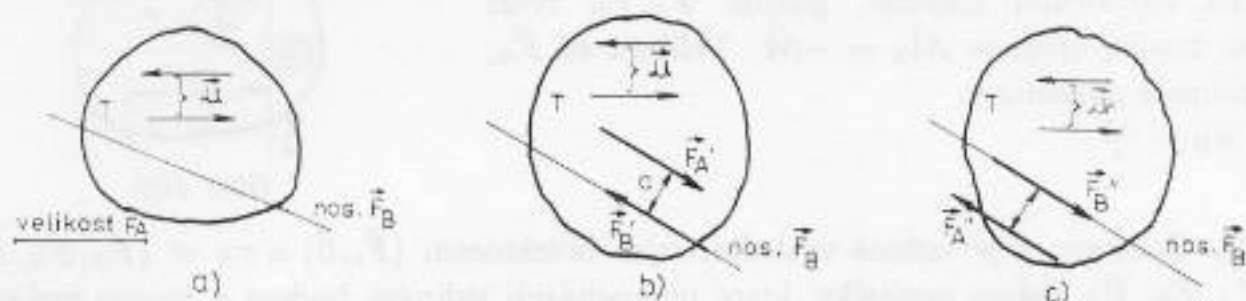


Obr. 106

Grafická konstrukce je zřejmá z obrázků.

Z obr. 106b vidíme, že úloha může mít jedno řešení ($d = F_A$), dvě řešení ($F_A > d$) nebo reálné řešení neexistuje ($F_A < d$).

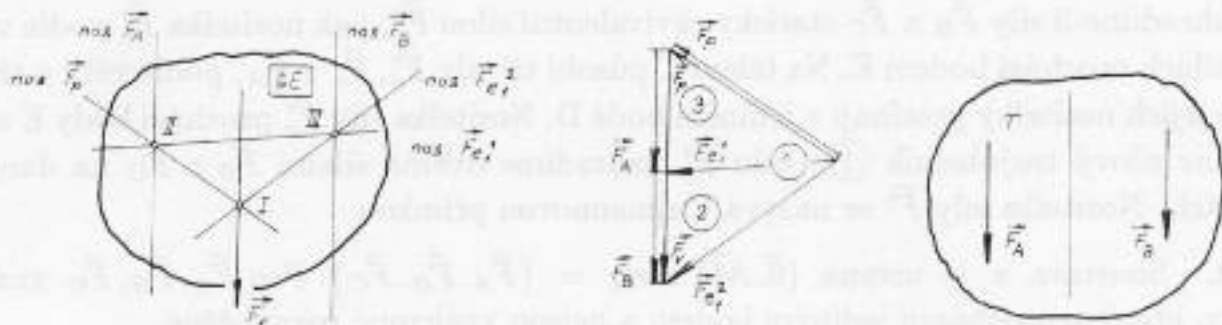
6. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$, $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ a pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A - velikost, \vec{F}_B - nositelku.



Obr. 107

Statická rovnováha nastane pokud \vec{F}_A, \vec{F}_B bude tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Nositelka síly \vec{F}_A musí být rovnoběžná s nositelkou síly \vec{F}_B . Jejich vzdálenost určíme výpočtem ze vztahu $a = \frac{M}{F_A}$. Úloha má dvě řešení viz obr. 107b a obr. 107c.

7. Soustava π je určena $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ a pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A - nositelku, \vec{F}_B - nositelku a $\pi \cup \pi_R$ je rovinná soustava rovnoběžných sil. Neznámými veličinami jsou velikosti a orientace sil \vec{F}_A a \vec{F}_B . Cílem této úlohy je staticky ekvivalentní nahrazení síly \vec{F}_v dvěma rovnoběžnými silami \vec{F}_A a \vec{F}_B na daných nositelkách.



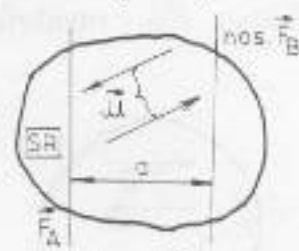
Obr. 108

Soustava sil $\{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$ je staticky ekvivalentní se silou \vec{F}_v . Statickou ekvivalenci nezměníme, jestliže k oběma soustavám připojíme stejnou sílu \vec{F}_p , tedy soustava $\pi_1 = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_p\}$ je staticky ekvivalentní se soustavou $\pi_2 = \{\vec{F}_v, \vec{F}_p\}$. Soustavu $\pi_2 = \{\vec{F}_v, \vec{F}_p\}$ nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1}^2 a síly \vec{F}_A a \vec{F}_p staticky ekvivalentní silou \vec{F}_{e1}^1 , pro kterou podle věty o třech silách známe bod nositelky (II). Síla \vec{F}_{e1}^2 , kterou známe úplně, je staticky ekvivalentní se silami \vec{F}_B a \vec{F}_{e1}^1 . Podle věty o třech silách se nositelky sil $\vec{F}_{e1}^2, \vec{F}_B$, a \vec{F}_{e1}^1 musí protínat v jednom bodě III. Nositelka síly \vec{F}_{e1}^1 musí procházet body II a III. Protože známe nositelky sil $\vec{F}_B, \vec{F}_{e1}^1$ a sílu \vec{F}_{e1}^2 úplně, můžeme ze silového obrazce určit \vec{F}_B , a \vec{F}_{e1}^1 úplně. Viz silový obrazec ②. Současně ze silového obrazce ③ můžeme určit \vec{F}_A . Silový obrazec ③ s nositelkami sil \vec{F}_p, \vec{F}_A a \vec{F}_{e1}^1 , vyjadřují statickou ekvivalenci sil \vec{F}_p, \vec{F}_A se silou \vec{F}_{e1}^1 .

8. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$ a pro \vec{F}_A, \vec{F}_B známe tyto veličiny: \vec{F}_A - nositelku, \vec{F}_B - nositelku, nositelky \vec{F}_A a \vec{F}_B jsou rovnoběžné.

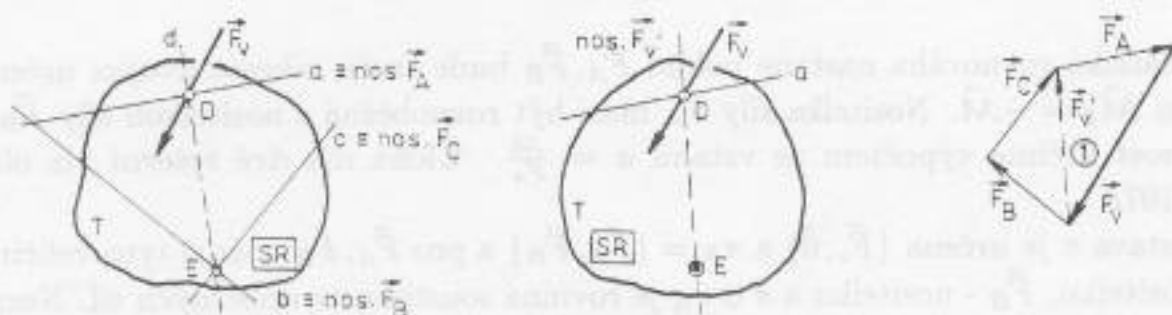
Statická rovnováha nastane, jestliže \vec{F}_A, \vec{F}_B tvoří silovou dvojici určenou $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Velikost sil \vec{F}_A, \vec{F}_B určíme z podmínky:

$$F_A = F_B = \frac{M}{a}.$$



Obr. 109

9. Soustava π je určena výslednicovým bivektorem $\{\vec{F}_v, \vec{0}\}$ a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\}$. Pro $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ známe nositelky, které neprocházejí jediným bodem a nejsou vzájemně rovnoběžné.



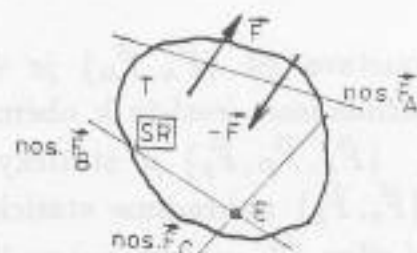
Obr. 110

Nahradíme-li síly \vec{F}_B a \vec{F}_C staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v' , pak nositelka \vec{F}_v' podle věty o třech silách prochází bodem E. Na těleso T působí tři síly \vec{F}_v', \vec{F}_v a \vec{F}_A , podle věty o třech silách se jejich nositelky protínají v jediném bodě D. Nositelka síly \vec{F}_v' prochází body E a D. Sestrojíme silový trojúhelník ①. Sílu \vec{F}_v' nahradíme dvěma silami \vec{F}_B a \vec{F}_C na daných nositelkách. Nositelka síly \vec{F}_v' se nazývá Culmannovou přímkou.

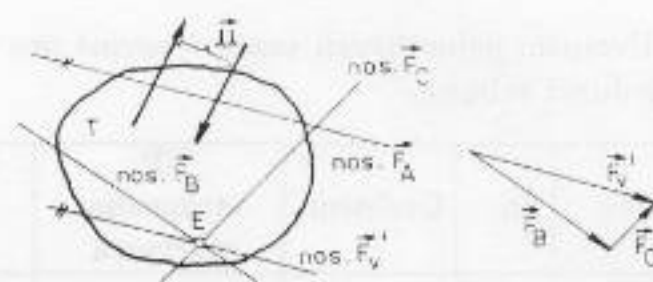
10. Soustava π je určena $\{\vec{0}, \vec{M}\}$ a $\pi_R = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\}$. Pro $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ známe nositelky, které neprocházejí jediným bodem a nejsou vzájemně rovnoběžné.

Obr. 111

Úlohu můžeme řešit superpozicí jako dvě úlohy 9 pro síly \vec{F} a $-\vec{F}$, které tvoří silovou dvojici jednoznačně určenou \vec{M} . Výhodnější bude řešení úlohy graficko-početním způsobem. Na základě věty o třech silách nahradíme dvě ze sil $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$ staticky ekvivalentní silou. Například \vec{F}_B a \vec{F}_C nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v' . Nositelka síly \vec{F}_v' prochází bodem E.



Podmínka statické rovnováhy bude splněna tehdy, budou-li síly \vec{F}_v' a \vec{F}_A tvořit silovou dvojici určenou momentem $\vec{M}_d = -\vec{M}$. Tedy nositelka \vec{F}_v' je rovnoběžná s \vec{F}_A a prochází bodem E. Velikost \vec{F}_A a \vec{F}_v' určíme z podmínky $F_v' = F_A = \frac{M}{b}$. Dále určíme síly \vec{F}_B a \vec{F}_C tak, že sílu \vec{F}_v' nahradíme staticky ekvivalentními silami \vec{F}_B a \vec{F}_C na daných nositelkách. Velikost a orientace sil \vec{F}_B a \vec{F}_C určíme ze silového obrazce.



Obr. 112

10.3 Grafické řešení statické rovnováhy vázaného tělesa.

Po formulaci základních vět grafického řešení a odvození základních grafických konstrukcí můžeme přikročit ke grafickému řešení vázaných těles. Budeme vycházet z postupu pro řešení statické rovnováhy vázaného tělesa, který je pro výpočtové řešení uveden v kap. 8 s tím, že kroky *d* - *f*, ve kterých se výpočtový a grafický způsob řešení odlišuje, jsou pro grafické řešení uvedeny na začátku této kapitoly (str. 142). Významné se bude také lišit **interpretace uvolnění** v důsledku toho, že při grafickém řešení pracujeme s celky (bod, orientovaná úsečka zobrazující sílu atd.) na rozdíl od výpočtového řešení, kde pracujeme s prvky (souřadnice bodu, souřadnice síly atd.).

U interpretace uvolnění pro grafické řešení je třeba znázornit známé geometrické útvary grafického zobrazení statické úlohy, které vyplývají z úplně zadané soustavy π a z uložení tělesa.

Na jejich základě a statické podmínce rovnováhy, pokud je to možné, určíme neznámé geometrické útvary, které zpětně zobrazíme na statické veličiny.

Vyjádření statické podmínky pro grafické řešení je následující:

- sílový obrazec je uzavřen – v jednom smyslu, pro statickou rovnováhu
 - smysl staticky ekvivalentní síly je opačný ke smyslu ostatních sil, pro statickou ekvivalenci
- pro obrazce nosítek nelze vyslovit názornou podmínku, kterou musí splňovat nositelky všech sil, lze ji však formulovat pro soustavu dvou a tří sil. Viz věty o třech silách.

Poznámka: Skutečnost, že nelze formulovat názornou podmínku, kterou musí splňovat nositelky všech sil, je příčinou, proč grafické konstrukce musíme rozdělit na posloupnost jednoduchých operací založených na větách o dvou a třech silách a větě o superpozici.

Uvolnění jednotlivých vazeb v rovině pro výpočtové a grafické řešení je znázorněno v následující tabulce.

Název	Zn.	Uvolnění	NP stykového bivektoru	Znamé parametry stykového bivektoru	Geometrické vyjádření
Obecná	o		F_n	nositelka styk. výsl.	
Rotační	r		F_x, F_y	působíště styk. výsl.	
Posuvná	p		F_A, M_A	směr styk. výsl.	směr nositelky \vec{F}_A
			F_A, x	směr styk. výsl.	
			F_{A1}, F_{A2}	působ. a nositelky	
Vetknutí	n		F_{Ax}, F_{Ay}, M_A	nic	nic

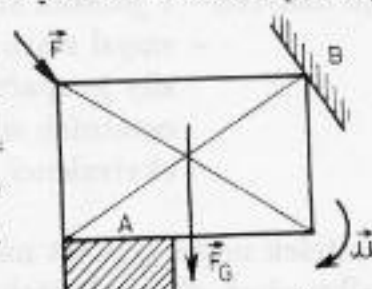
Tab. 9

Nyní přistoupíme ke grafickému řešení příkladu z kapitoly 8. Ukážeme několik postupů a problémů, které se při grafickém řešení mohou vyskytovat. Řešení nebudeme provádět celé, ale pouze ty kroky, které jsou při grafickém a výpočtovém řešení odlišné.

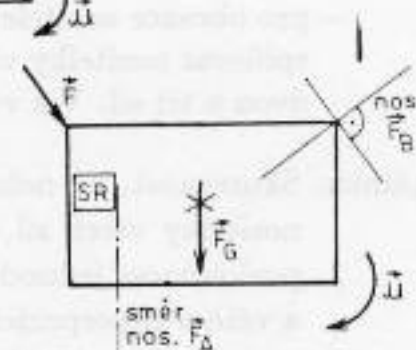
Na těleso působí soustava úplně zadaných silových prvků $\pi = \{\vec{F}, \vec{F}_G, \vec{M}\}$ a soustava neúplně určená $\pi_r = \{\vec{F}_A, \vec{F}_B\}$.

Při řešení neznámých veličin neúplně určených sil můžeme postupovat takto:

- a) Soustavu π nahradíme jedinou staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v nebo jedinou silovou dvojicí \vec{M}_v , je-li $\vec{F}_v = \vec{0}$, (rovinná úloha) a pro ně určíme neznámé veličiny neúplně určených sil.



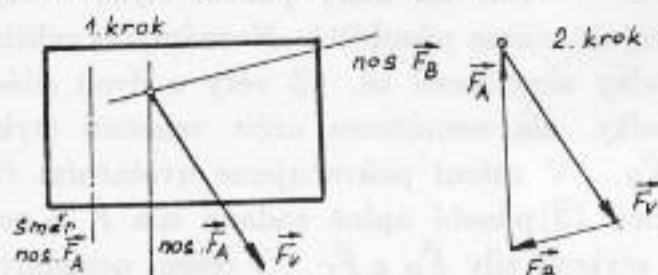
- b) Provádíme řešení zvlášť pro sílu \vec{F} , \vec{F}_G a zvlášť pro působení silové dvojice určené momentem \vec{M} . Dílčí řešení neúplně určených sil pak nahradíme výsledným staticky ekvivalentním řešením.



Obr. 113

ad a) Síly \vec{F} a \vec{F}_G nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}'_v . Nejjednodušší silová soustava, která je jednoznačně určena momentem \vec{M} je silová dvojice, pro kterou platí $M = F_1 \cdot b = F'_1 \cdot c$. Zvolíme jednu z veličin F_1, b a druhou vypočítáme, například F_1 zvolíme a vzdálenost nosítek b vypočítáme ze vztahu $b = \frac{M}{F_1}$. Smysl síly \vec{F}_1 zvolíme tak, aby silová dvojice \vec{F}_1, \vec{F}'_1 měla stejný smysl jako \vec{M} . Síly \vec{F}'_v a \vec{F}_1 nahradíme staticky ekvivalentní silou \vec{F}''_v a obdobně \vec{F}''_v a \vec{F}'_1 staticky ekvivalentní silou \vec{F}_v .

Efektivněji můžeme staticky ekvivalentní sílu určit takto: Síly \vec{F} a \vec{F}_G nahradíme stejně jako v předchozím postupu \vec{F}'_v . Protože sílu \vec{F}_1 můžeme volit, zvolíme ji na nositelce síly \vec{F}'_v stejně velikou, ale opačně orientovanou k \vec{F}'_v . Dále určíme vzdálenost c nosítek sil \vec{F}_1 a \vec{F}'_1 ze vztahu $c = \frac{M}{F_1}$. Síly \vec{F}'_v a \vec{F}_1 tvoří rovnovážnou soustavu a síla \vec{F}'_1 je staticky ekvivalentní se soustavou π . Viz obr. 114b.

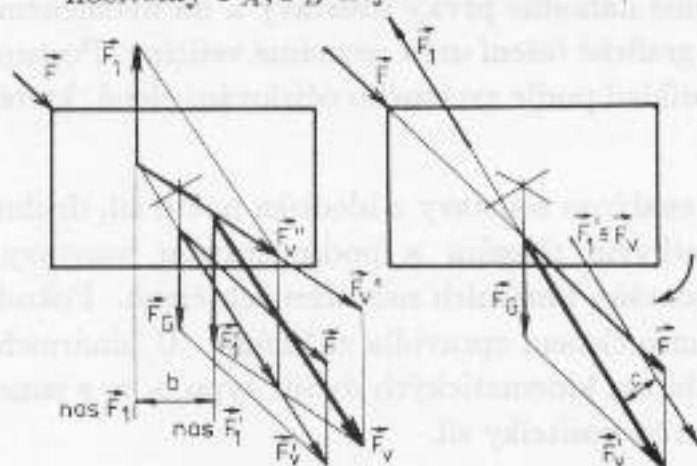


Obr. 115

Další postup řešení je stejný jako u úlohy 3 na str. 150. Na těleso působí tři síly $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_v$. Podle věty o třech silách určíme v prvním kroku nositelky a ve druhém velikost a smysl \vec{F}_A, \vec{F}_B . Viz obr. 115.

Poznámka: Pokud $\vec{F}_v = \vec{0}$ a $\vec{M} \neq \vec{0}$, rovnováha tělesa vázaného posuvnou a obecnou kinematickou dvojicí v zadané konfiguraci nemůže nastat.

ad b) Řešení dílčích stykových sil \vec{F}_A, \vec{F}_B působí-li na těleso pouze \vec{F} nebo \vec{F}_G je obdobné jako při postupu a) pro sílu \vec{F}_v . Dále se budeme zabývat řešením dílčích stykových sil \vec{F}_A, \vec{F}_B , působí-li na těleso pouze silová dvojice určená momentem \vec{M} . Protože nositelky \vec{F}_A, \vec{F}_B nejsou rovnoběžné, nelze tyto dílčí stykové síly určit.



Nyní musíme zdůvodnit, proč tento postup nevede k řešení. Řešíme-li úlohu zvlášť pro síly \vec{F}, \vec{F}_G a \vec{M} , provádíme řešení superpozicí. Z věty o superpozici víme, že základním předpokladem je lineární úloha. Vzhledem k tomu, že u stykových síly \vec{F}_A neznáme polohu nositelky a velikost, je tato úloha nelineární. Proto postup b) nevede k řešení úlohy.

Obr. 114

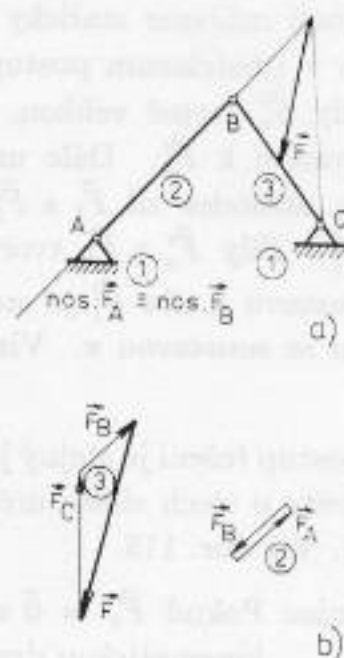
10.4 Grafické řešení statické rovnováhy soustav těles.

V souladu s kap. 9 budeme pod pojmem statická rovnováha soustavy těles rozumět podmíněnou statickou rovnováhu, což znamená, že soustava je ve statické rovnováze tehdy, je-li každý její prvek a tím každá podsoustava ve statické rovnováze. Grafické řešení statické rovnováhy soustavy těles spočívá v posloupnosti grafických řešení neznámých veličin,

stykových sil působících na uvolněné prvky soustavy těles. Neznámé veličiny stykových sil řešíme graficky na základě podmínky statické rovnováhy uvolněného členu soustavy těles.

Vzhledem k tomu, že podmínka statické rovnováhy pro grafické řešení má část týkající se nositelky neznámých sil a část týkající se velikosti a smyslu neznámých sil a neznámé veličiny se vztahují zpravidla ke dvěma prvkům soustavy těles, není posloupnost grafických řešení vždy přímá, ale může obsahovat zpětné kroky.

Například soustava podle obr. 116. Člen ② je binární nezátížený člen, na který působí stykové síly \vec{F}_A, \vec{F}_B , u kterých známe působíště. Neznámými veličinami jsou nositelky a velikosti sil. Z věty o dvou silách určíme nositelky, ale nemůžeme určit velikosti stykových sil \vec{F}_A, \vec{F}_B . V řešení pokračujeme uvolněním členu ③. Na člen ③ působí úplně zadaná síla \vec{F} a neúplně určené stykové síly \vec{F}_B a \vec{F}_C . Z řešení neznámých veličin stykových sil působících na člen ② známe nositelku síly \vec{F}_B . Využitím věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C a sestrojíme silový obrazec sil působících na člen ③ viz obr. 116b. Tím jsme určili všechny neznámé veličiny stykových sil působících na člen ③ a můžeme se vrátit zpět na člen ②. Vzhledem k tomu, že jsme úplně určili sílu \vec{F}_B , můžeme sestavit silový obrazec členu 2.

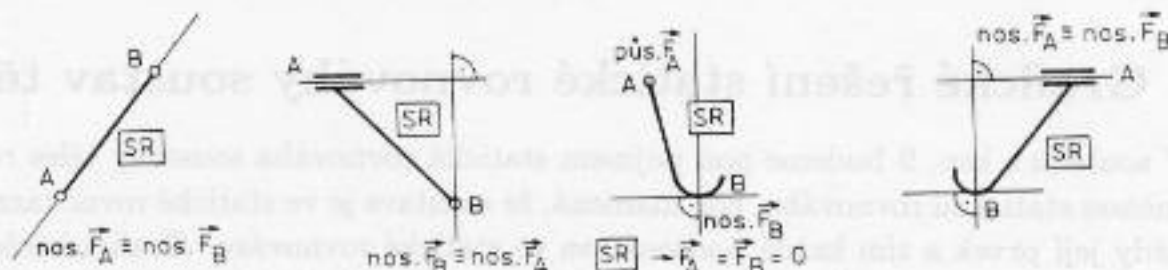


Obr. 116

K určení posloupnosti grafického řešení, které vede k určení všech neznámých veličin, můžeme zvolit dvojí přístup - **náhodný a promyšlený**.

Při náhodném postupu řešení uvolňujeme náhodně prvky soustavy a na uvolněném prvku se snažíme z podmínky rovnováhy pro grafické řešení určit neznámé veličiny. Postup uvolňování jednotlivých prvků může být například podle zvoleného očíslování členů, které jsme zvolili zcela náhodně.


Promyšlený postup je charakteristický analýzou soustavy z hlediska počtu sil, druhu neznámých veličin vztahujících se k jednotlivým tělesům a podsoustavám soustavy. Z těchto hledisek je vhodné všimnout si především binárních nezátížených členů. Pokud soustava takový člen obsahuje, pak řešení tímto členem zpravidla začínáme. U binárních nezátížených členů vázaných libovolnou kombinací kinematických dvojic typu o, r, p jsme vždy schopni na základě věty o dvou silách určit nositelky sil.



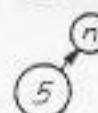
Obr. 117


Při promyšleném postupu grafického řešení si posloupnost grafických operací, která vede na určení všech neznámých veličin, nejdříve vytvoříme v představě, kterou je možné zobrazit orientovaným grafem.

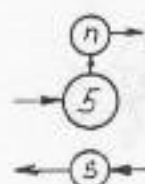
Orientovaný graf zobrazuje posloupnost uvolněných prvků a podsoustav soustavy těles, na kterých můžeme určit na základě jedné ze dvou částí statické podmínky rovnováhy v grafickém vyjádření odpovídající neznámé veličiny (velikosti nebo nositelky) stykových sil působících na daný prvek resp. podsoustavu. K tomuto vyjádření budeme používat tyto symboly:

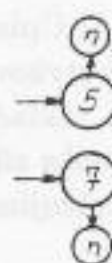
 –prvek soustavy typu těleso

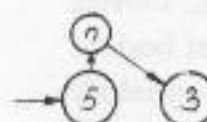
 –podsoustava soustavy


 –na prvku soustavy lze určit nositelky všech sil působících na prvek

 –na prvku soustavy lze úplně určit síly působící na daný prvek

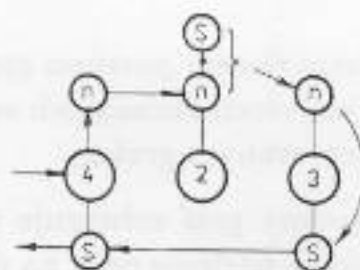
 –na prvku určíme nejdříve nositelky a na základě veličin určených na jiných prvcích určíme i velikosti a orientace sil

 –na dvou prvcích lze současně určit nositelky sil

 –na prvku 3 nemůžeme určit nic a postupujeme na další prvek

 –vyjádření postupu řešení

Uvedené schéma charakterizuje tento postup řešení: Řešení začneme uvolněním členu ④ a na základě statické podmínky rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadané soustavy určíme nositelky stykových sil působících na člena ④.

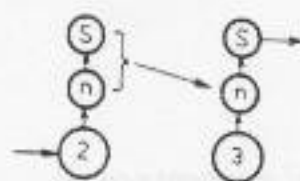


Obr. 118

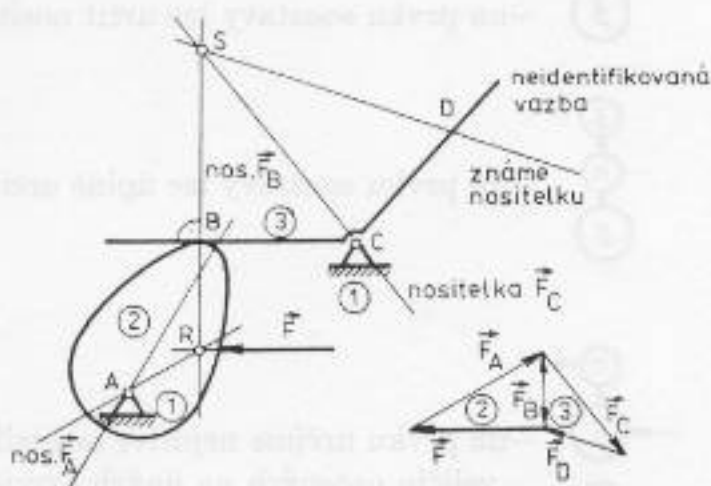
Dále pokračujeme uvolněním členu ②. Z podmínky statické rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadání soustavy a určených nositelek stykových sil působících na člen ④ určíme stykové síly působící na člen ②. Dále uvolníme člen ③. Na základě statické podmínky rovnováhy pro grafické řešení a známých veličin ze zadání a předchozího řešení určíme úplně i vazbové síly působící na člen ③. Nyní se vrátíme na člen ④ a určíme velikost a smysl stykových sil působících na člen ④.

Z hlediska postupu při řešení statické rovnováhy soustav těles rozlišujeme čtyři základní úlohy, které si ukážeme na jednoduchých příkladech.

První úloha je charakteristická tím, že při vhodné posloupnosti uvolňování prvků můžeme na každém uvolněném prvku určit všechny neznámé veličiny. Postup můžeme charakterizovat následujícím schématem:



Obr. 120



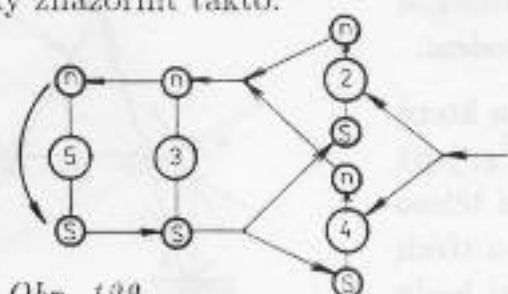
Obr. 119

Postup řešení: - Uvolníme binární zatížený člen ②. Na člen ② působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_B , jejíž nositelka prochází bodem B kolmo na člen ③ a styková síla \vec{F}_A , která prochází bodem A. Nositelky sil \vec{F} a \vec{F}_B se protínají v bodě R. Na základě věty o třech silách tímto bodem musí procházet také nositelka síly \vec{F}_A , tedy nositelka síly \vec{F}_A je určena body A, R. Protože známe sílu \vec{F} úplně a nositelky sil \vec{F}_B a \vec{F}_A , sestrojíme silový trojúhelník prvku ②.

- Uvolníme ternární nezatížený člen ③. Na člen ③ působí styková síla \vec{F}_B , kterou známe úplně, síla \vec{F}_D , pro kterou známe nositelku a styková síla \vec{F}_C , která prochází bodem C. Na základě věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C a sestrojíme silový trojúhelník ③.

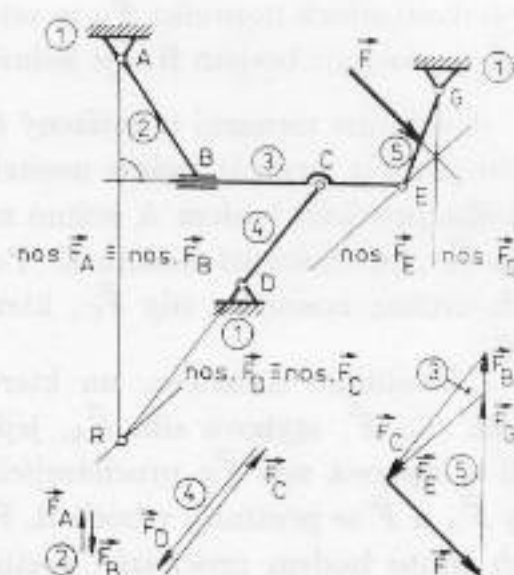
Druhá úloha. Pro grafické řešení této soustavy je charakteristické, že po uvolnění prvků, na žádném prvku nemůžeme určit všechny neznámé veličiny, ale pouze postupným určováním neznámých veličin dosáhneme stavu, kdy na prvku ⑤ můžeme určit všechny neznámé veličiny a vhodným zpětným postupem i na ostatních prvcích. Postup můžeme

schématicky znázornit takto:



Obr. 122

Postup řešení: - Uvolníme binární nezatížený člen ② s jednou kinematickou dvojicí rotační a jednou posuvnou. Na člen ② působí styková síla \vec{F}_A a \vec{F}_B , přičemž známe působíště síly \vec{F}_A a směr nositelky stykové síly \vec{F}_B . Na základě věty o dvou silách, nositelka síly \vec{F}_A je totožná s nositelkou síly \vec{F}_B . Prochází bodem A kolmo k ose posuvu.



Obr. 121

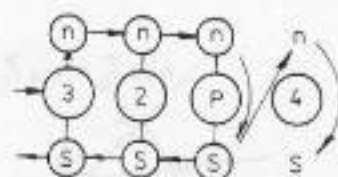
- Uvolníme binární nezatížený člen ④ se dvěma rotačními kinematickými dvojicemi. Na člen ④ působí stykové síly \vec{F}_D a \vec{F}_C s působíšti v bodech C a D. Na základě věty o dvou silách nositelka síly \vec{F}_C je totožná s nositelkou síly \vec{F}_D a prochází body C a D.

- Uvolníme ternární nezatížený člen ③. Známe nositelky stykových sil \vec{F}_B a \vec{F}_C , které se protínají v bodě R, a dále známe působíště stykové síly \vec{F}_E . Na základě věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_E , která musí procházet body R a E.

- Uvolníme binární zatížený člen ⑤. Na člen ⑤ působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} a stykové síly \vec{F}_E a \vec{F}_G . Protože známe nositelku \vec{F}_E a působíště síly \vec{F}_G , můžeme na základě věty o třech silách určit nositelku síly \vec{F}_G a sestavit silový trojúhelník pro člen ⑤ a člen ③.

Třetí úloha. Tato soustava je charakteristická tím, že pro určení všech neznámých veličin musíme uvolnit nejen všechna tělesa, ale také podsoustavu.

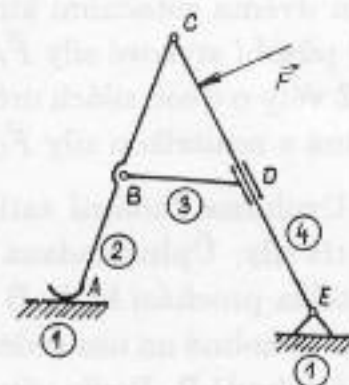
Postup může být schématicky znázorněn takto:



Obr. 124

kde P je uvolněná podsoustava ③, ④ od základního tělesa.

Postup: - Uvolníme binární nezatížený člen ③, na který působí styková síla \vec{F}_B procházející bodem B a stykové síla \vec{F}_D , která je kolmá na osu vedení. Podle

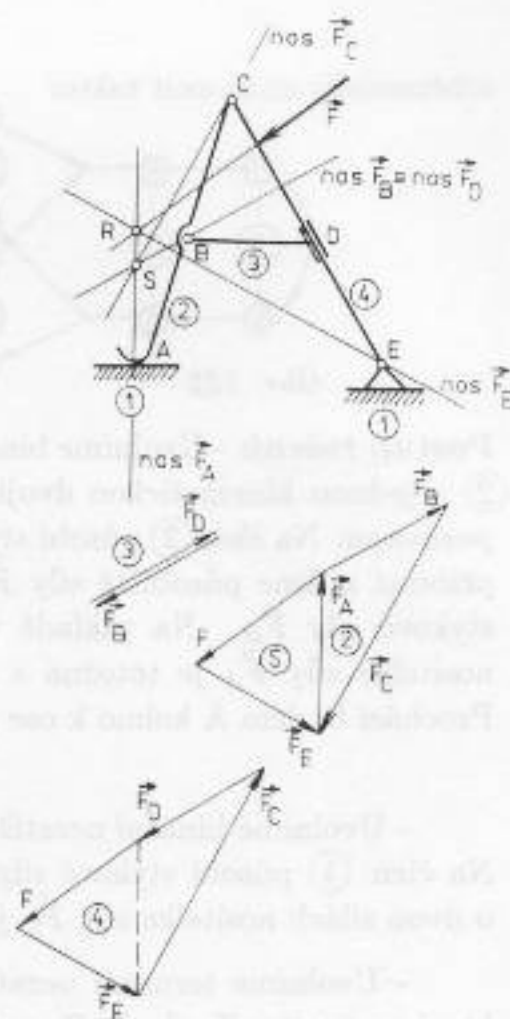


věty o dvou silách nositelka \vec{F}_B je totožná s nositelkou síly \vec{F}_D , prochází bodem B a je kolmá na osu vedení.

Uvolníme ternární nezatížený člen (2), na který působí síla \vec{F}_B , pro níž známe nositelku, síla \vec{F}_A , jejíž nositelka prochází bodem A kolmo na základní těleso a síla \vec{F}_C , procházející bodem C. Podle věty o třech silách určíme nositelku síly \vec{F}_C , která prochází body S a C.

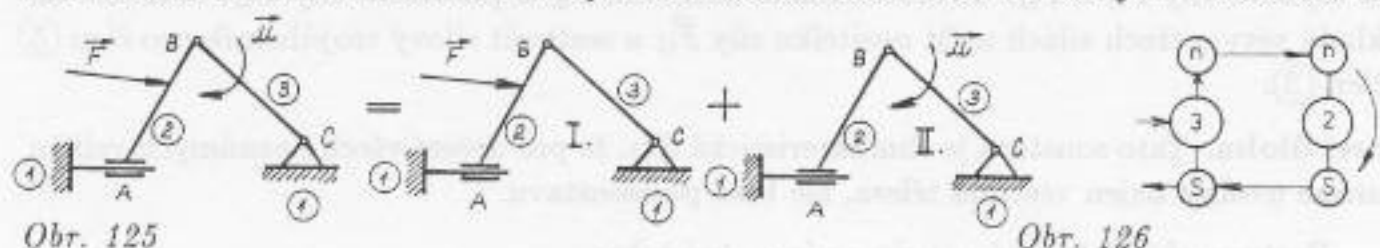
Uvolníme soustavu, na kterou působí úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_A , jejíž nositelku jsme určili a styková síla \vec{F}_E procházející bodem E. Nositelky \vec{F}_A a \vec{F} se protínají v bodě R. Podle věty o třech silách tímto bodem prochází i nositelka síly \vec{F}_E a je dána body R a E. Nyní již můžeme postupně sestavit silové obrazce pro (5), (2), (3), (4).

Čtvrtá úloha. Využití věty o superpozici si ukážeme na grafickém řešení stykových sil u soustavy podle obr. 125. Nejdříve budeme uvažovat, že na soustavu působí pouze síla \vec{F} a určíme stykové síly, které označíme čárkou. Potom budeme uvažovat pouze působení silové dvojice určené \vec{M} a pro toto působení určíme stykové síly, které označíme dvěma čárkami.



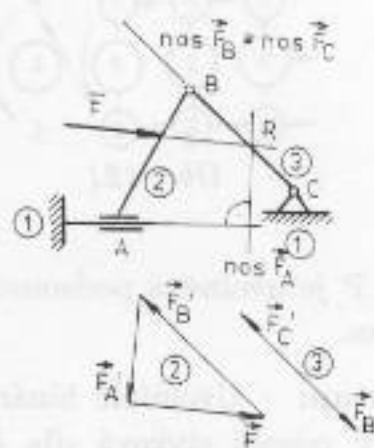
Obr. 128

Stykové síly pro zadané silové působení se bude rovnat vektorovému součtu stykových sil s čárkou a dvěma čárkami. Postup můžeme charakterizovat následujícím schématem:



Postup I: - Uvolníme binární nezatížený člen (3), který je vázán dvěma rotačními kinematickými dvojicemi. Na člen (3) působí stykové síly \vec{F}_B a \vec{F}_C s působišti v bodech B a C. Z věty o dvou silách určíme nositelku síly \vec{F}_B , která je totožná s nositelkou síly \vec{F}_C a prochází body B a C.

Uvolníme binární zatížený člen (2). Na člen (2) působí tři síly. Úplně zadaná síla \vec{F} , styková síla \vec{F}_B , jejíž nositelka prochází body B a C a styková síla \vec{F}_A , jejíž nositelka je kolmá na osu vedení. Nositelky síly \vec{F} a \vec{F}_B se protínají v bodě R. Podle věty o třech silách tímto bodem musí procházet také nositelka \vec{F}_A , která je kolmá na osu vedení. Dále sestrojíme silový trojúhelník členu (2) a silový obrazec členu (3).



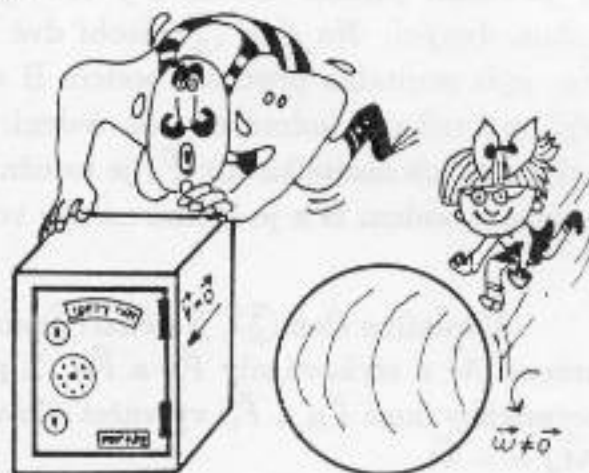
Obr. 127

Kapitola 11.0

Vázaná tělesa a soustavy těles s vazbami typu NNTP.

11.1 Vazby typu NNTP - pasivní

V kapitole 7 jsme se zabývali stykem těles. Vymezili jsme dva základní typy styku NNTN a NNTP, které se liší silovými a energetickými podmínkami ve směru geometricky možného pohybu. Dosud jsme se zabývali statickým řešením vázaného tělesa a soustav těles s vazbami pro něž je styk NNTN modelem reálného styku. Jde především o nepohyblivě vázaná tělesa a soustavy těles, u kterých je z hlediska silového působení podstatné omezení všech složek pohybu stykovými vazbami.



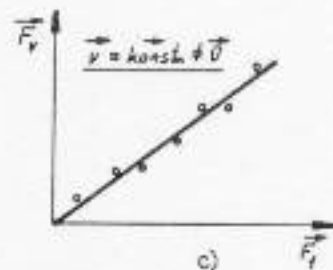
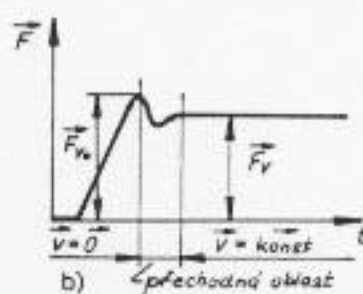
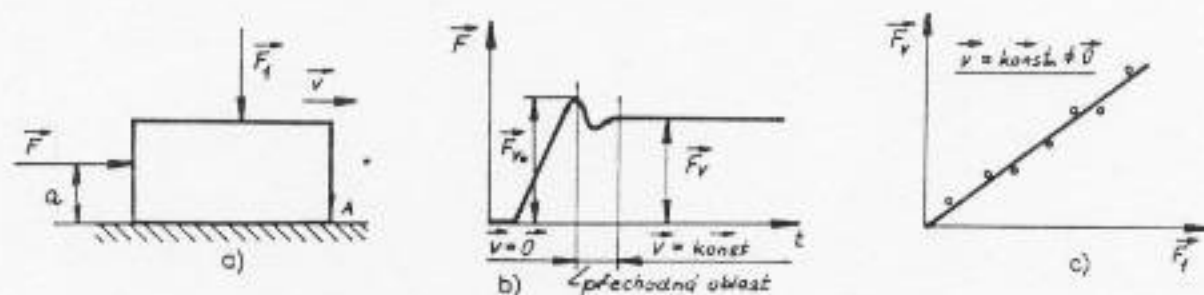
Obr. 132

Z každodenní praxe však víme, že existuje řada případů pohyblivého uložení těles, případně soustav těles, které se při působení síly ve směru geometricky možného pohybu začnou pohybovat, až působící síla dosáhne určité hodnoty a charakter pohybu vedle jiných parametrů závisí také na velikosti této síly. Viz obr. 132.

V těchto případech styk NNTN není výpočtovým modelem vazeb. V odst. 7.1 jsme uvedli, že vyšetřováním podmínek styku se zabývá tribologie. Vzhledem k obtížnosti popisu mikrostruktury stykové plochy je v tribologii **základem experimentální přístup**, zpracování výsledků a jejich zobecnění.

S elementárními experimenty týkajícími se smyku a valení tělesa na nakloněné rovině se studenti již setkali. Závažnost problematiky silové a energetické pasivity vyžaduje, abychom základní znalosti zopakovali, rozšířili a zobecnili na patřičné úrovni. Proto podrobněji popíšeme dva experimenty, při nichž je vyšetřován přechod hranolu a válce z klidu do pohybu na vodorovné desce, s cílem určit závislost mezisložkamistykových sil.

Uspořádání prvního experimentu je zřejmé z obrázku.



Obr. 133

Podmínky experimentu:

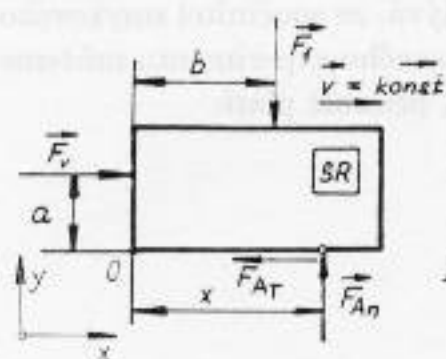
- Stykové plochy jsou stejně a stejnoměrně opracované
- $a = \text{konst}$, $\vec{F}_1 = \text{konst}$ během celého experimentu
- \vec{v} měřená veličina (řízená veličina)
- $\vec{F} = \vec{F}(t)$ - řídicí veličina (akční)

Průběh a vyhodnocení experimentu:

Řídicí veličinou je velikost síly \vec{F} , kterou řídíme tak, aby hranol přešel z klidu do rovnoměrného přímočarého pohybu. Časová závislost a charakteristické stavy jsou graficky znázorněny na obr. 133b, z kterého vyplývá, že při rovnoměrném přímočarém pohybu je $\vec{F}_v = \text{konst}$. Při přechodu hranolu z klidu do pohybu je třeba působit silou $\vec{F}_{v0} > \vec{F}_v$ - přechodná oblast.

Nyní budeme experiment opakovat s různou hodnotou síly \vec{F}_1 , s cílem určit závislost $F_v = f(F_1)$. Po provedení a vyhodnocení experimentu jsme získali závislost, jejíž grafické znázornění je na obr. 133c, odkud vyplývá $F_v = \text{konst} \cdot F_1$. ($F_v = F$ při pohybu hranolu $\vec{v} = \text{konst}$.)

Silové poměry ve styku určíme z uvolnění hranolu viz obr. 134 a rovnic rovnováhy.



Rovnice rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_x: F_v - F_{AT} &= 0 & \Rightarrow F_{AT} &= F_v \\ F_y: F_{An} - F_1 &= 0 & \Rightarrow F_1 &= F_{An} \\ M_{zO}: -F_v a - F_1 b + F_{An} x &= 0 & \Rightarrow x &= \frac{F_v a + F_1 b}{F_{An}} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Obr. 134

Po dosazení (11.1) do experimentálně určené závislosti $F_v = \text{konst} \cdot F_1$ obdržíme $F_{AT} = \text{konst} \cdot F_{An}$

kde F_{At} - tečná složka výsledné stykové síly obecně není závislá na F_{An} .

F_{AT} - třecí síla, tečná složka výsledné stykové síly za pohybu

Uvedený experiment je základem definice Coulombovského tření. Vzhledem k tomu, že tření je závislé na mikrostruktuře stýkajících se povrchů je definice vymezena pro diferenciální veličiny ve tvaru

$$\begin{aligned} \vec{v} &\neq \vec{0} \\ dF_T &= \text{konst} \cdot dF_n = f \cdot dF_n \\ \vec{e}_{F_T} &= -\vec{e}_v \end{aligned}$$

kde f - součinitel smykového tření

f_0 - součinitel smykového tření v přechodné oblasti

dF_T - třecí síla

Z hlediska vymezení Coulombovského tření, třecí síla nezávisí na velikosti třecích ploch.

Součinitel smykového tření významně závisí:

- na jakosti povrchu třecích ploch
- na materiálu třecích ploch
- na jakosti mazání
- na teplotě v místě styku

Hodnoty součinitele smykového tření jsou uvedeny v tab. 10

Materiál těles	f_o	f
ocel na oceli	0,15	0,03 - 0,09
ocel na litině	0,33	0,13 - 0,17
ocel na fosfátovém bronzu	0,11	0,01
tvrdé dřevo na tvrdé dřevo		
ve směru vláken	0,6	0,5
napříč vláken	0,7	0,6

Tab. 10

Určení střední hodnoty součinitele smykového tření:

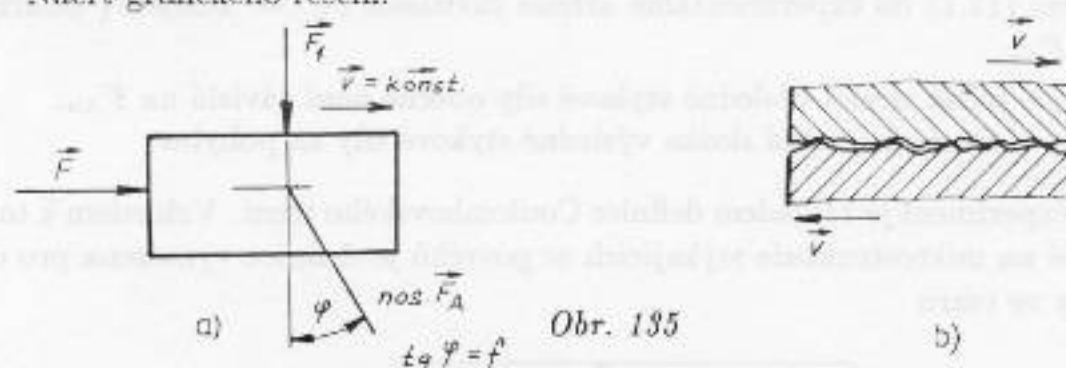
Z definičního vztahu Coulombovského tření $dF_T = f dF_n$ vyplývá, že součinitel smykového tření se vztahuje k diferenciálním veličinám. Na základě popsaného experimentu můžeme určit střední hodnotu součinitele smykového tření $F_T = f_s F_n$ přičemž platí:

$$(11.2) \quad f_s = \frac{F_T}{F_n} = \frac{\int_{\Gamma_s} p_t dS}{\int_{\Gamma_s} p_n dS} = \frac{\int_{\Gamma_s} f p_n dS}{\int_{\Gamma_s} p_n dS}$$

jestliže $f = \text{konst.}$, pak $f_s = f$

Podstatou smykového tření je deformace reliefu stýkajících se ploch. Viz obr. 135b.

Náčrt grafického řešení:



Obr. 135

Nositelka stykové síly je od kolmice v místě styku odchýlena o úhel φ tak, že tečná složka stykové síly má opačný smysl než \vec{v} . Pro úhel φ platí: $\tan \varphi = \frac{F_{AT}}{F_{An}}$, viz obr. 135a.

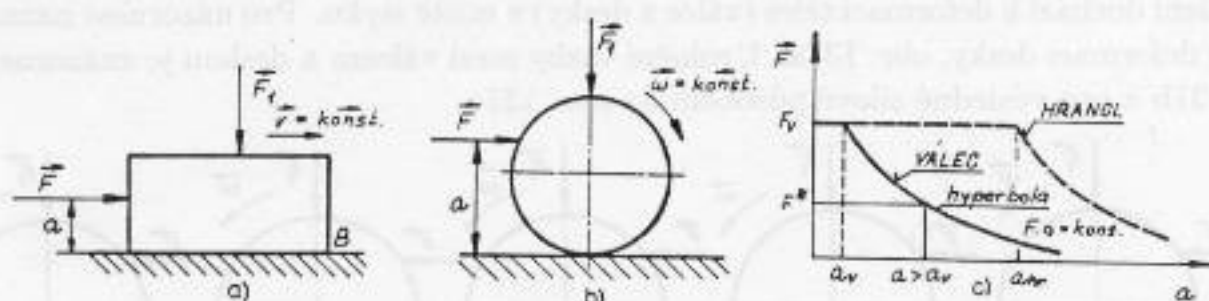
V průběhu rozvoje mechaniky byl uvedený experiment mnohokrát zopakován a o pravdivosti tvrzení z něho vyvozených se může každý student přesvědčit improvizovanými pokusy a pozorováním jevů kolem sebe.

Vyvozená tvrzení ještě jednou zopakujeme.

- 1) Mezi působící silou \vec{F} a pohybem tělesa platí tyto relace:
 - je-li $F < F_v = F_{AT}$ - těleso je v klidu
 - je-li $F = F_v = F_{AT}$ - těleso je v přechodové oblasti mezi klidem a pohybem
 - je-li $F > F_{AT}$ - těleso se pohybuje nerovnoměrně
- 2) Orientace síly \vec{F} a pohyb tělesa jako celku jsou vždy shodné. Orientace síly \vec{F}_{AT} a pohyb tělesa jako celku jsou vždy opačné.
- 3) Práce třecích sil při rovnoměrném pohybu se mění nevratně na teplo, což se projeví ohřevem okolí styku.
- 4) Přechod z klidu do pohybu je nestabilní. Jakmile pohyb nastane, velikost síly náhle klesá z počáteční hodnoty a ustavuje se na hodnotě F_T . Tuto skutečnost známe z běžného života, jen si ji neuvědomujeme.

Nyní se vrátíme k experimentu s tím, že budeme řídit také veličinu a a experimentovat budeme nejen s hranolem, ale i válcem.

Uspořádání druhého experimentu je zřejmé z obrázku.



Obr. 136

Podmínky experimentu:

- Stykové plochy stejně a stejnoměrně opracované. Materiál těles (hranol, válec) má větší tuhost než materiál základní desky.
- $\vec{F}_1 = konst.$ během celého experimentu
- \vec{v} resp. $\vec{\omega}$ řízená veličina
- a parametrická veličina - v průběhu experimentu se mění, ale jednotlivá měření provádíme pro $a = konst.$
- $\vec{F}(t)$ řídicí veličina - velikost $F(t)$ budeme řídit tak, abychom těleso uvedli z klidu do rovnoměrného pohybu.
- Jsme schopni sledovat deformaci tělesa.

Popis experimentu:

a) **Hranol** - Nejdříve předběžně zjistíme vliv parametru a . Zvětšujeme-li a při konstantní hodnotě síly \vec{F} , pak při dosažení určité hodnoty nastane překlopení hranolu. Jestliže na hranol působí síla $\vec{F} = \vec{F}_v$, pak hodnotu parametru a , při které se hranol začne převracet, označíme a_{hr} , viz obr. 136c.

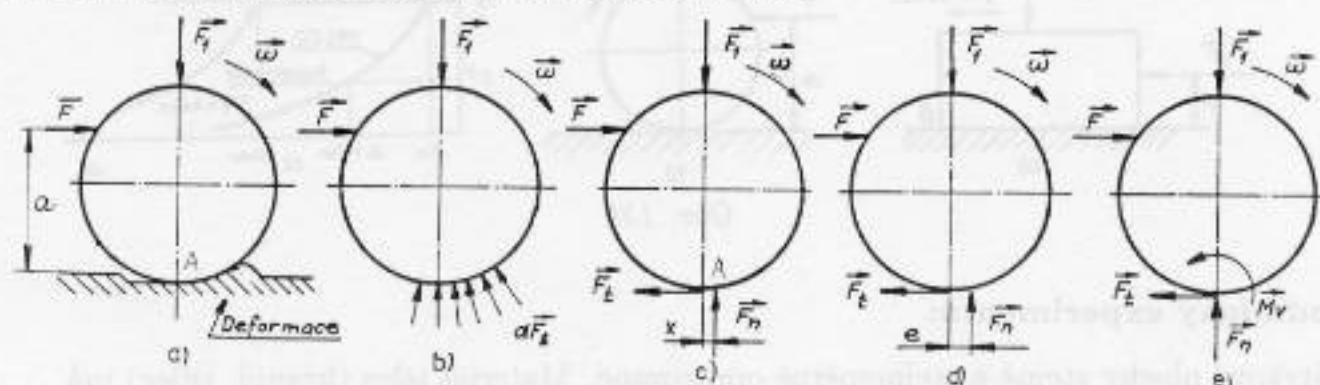
Je-li $a \leq a_{hr}$ pak při působení $\vec{F} < \vec{F}_v$ je hranol v klidu. Neuvažujeme-li přechodnou oblast a zvětšujeme-li \vec{F} na \vec{F}_v , pak se hranol začne pohybovat rovnoměrným pohybem, jestliže sílu \vec{F} dále zvětšujeme hranol se pohybuje zrychleným pohybem. Je-li hodnota parametru $a = a_{hr}$, pak hranol zůstává až do hodnoty síly $\vec{F} = \vec{F}_v$ v klidu, po jejím dosažení dochází k překlopení hranolu kolem bodu B a tím ke změně charakteru vazby. Je-li $a > a_{hr}$ pak k překlopení hranolu dochází při $\vec{F} < \vec{F}_v$. Oblast, ve které dochází k překlopení hranolu, popisuje čárkovaná křivka na obr. 136c.

Smýkání hranolu jsme popsali v předchozí části. Překlápěním hranolu se nebudeme blíže zabývat, protože se mění charakter vazby.

b) **Válec** - Pro "malé" hodnoty parametru a ($a < a_v$) a $\vec{F} < \vec{F}_v$ je válec v klidu. Jestliže $\vec{F} = \vec{F}_v$ válec se pohybuje smýkáním. Pro $a > a_v$ je válec zpočátku zatěžován v klidu, jestliže síla \vec{F} dosáhne jisté hodnoty \vec{F}^* , která je menší než \vec{F}_v dochází k valení válce. Z vyhodnocení experimentu zjistíme, že závislost $\vec{F}^* - a$ při valení je hyperbolická (viz obr. 136c) a platí:

$$(11.3) \quad F^* a = F a = konst'$$

Při valení dochází k deformaci těles (válce a desky) v místě styku. Pro názornost naznačíme pouze deformaci desky, obr. 137a. Uvolnění vazby mezi válcem a deskou je znázorněno na obr. 137b a pro výsledné silové působení na obr. 137c.



Podmínky statické rovnováhy: (Obr. 137c)

Obr. 137

$$\begin{aligned} F_x : F - F_t &= 0 \implies F_t = F \\ F_y : -F_1 + F_n &= 0 \implies F_n = F_1 \\ M_{zA} : F_n x - F a &= 0 \implies F_n x = F a \end{aligned}$$

Po dosazení experimentálně zjištěné závislosti $F a = konst'$ (viz vztah 11.3) obdržíme:

$$F_n x = F a = konst' \implies x = \frac{konst'}{F_n} = \frac{konst'}{F_1} = konst. = e$$

Vzdálenost nositelky normální síly od bodu A nazýváme ramenem valivého odporu a značíme ji e , přičemž $e = konst.$ Nositelka normální síly je posunuta vzhledem k bodu A o rameno valivého odporu **proti pohybu tělesa v místě styku**. Uvolnění válce, při valení s uvažováním výsledků experimentu je zobrazeno na obr. 137d. Na obr. 137e je znázorněno uvolnění válce v případě, kdy působení síly \vec{F}_n jsme vyjádřili staticky ekvivalentním

silovým působením v bodě A ($\{\vec{F}_n, \vec{M}_v\}$). \vec{M}_v nazýváme momentem valivého odporu, jehož smysl musí být vždy **proti pohybu tělesa v místě styku**.

Velikost ramene valivého odporu závisí na materiálu stýkajících se těles. Orientační hodnoty jsou v následující tabulce.

Materiál těles	e [mm]
litina na litině	0,5
ocel na oceli	0,5
dřevo na kamení	1,5
tvrdé dřevo na tvrdém dřevě	0,5

Tab. 11

Podstatou valivého odporu je deformace těles v místě styku. Jestliže dochází k valení, musíme tělesu dodávat energii, která se v místě styku mění nevratně na teplo a zbytkovou energii napjatosti.

Na závěr zopakujeme tvrzení vyvozená z uvedeného experimentu se zaměřením na válec, protože u hranolu nastává buď smýkání, které jsme popsali v předchozí části nebo dochází k překlápění hranolu, které není předmětem našeho zájmu.

- 1) Mezi působící silou \vec{F} , parametrem a a pohybem válce platí tyto relace:

Je-li $a < a_v = e$ pak pro $\vec{F} < \vec{F}_v$ - válec je v klidu

Je-li $a < a_v = e$ pak pro $\vec{F} = \vec{F}_v$ - válec se smýká

Je-li $a > a_v = e$ a $Fa < F_v e$ - válec je v klidu

Je-li $a > a_v = e$ a $Fa = F_v e$ - pak nastává valení tělesa rychlostí $\vec{\omega} = \text{konst.}$

Je-li $Fa > F_v e$ - pak se těleso pohybuje nerovnoměrně

- 2) Moment valivého odporu má vždy opačný smysl než $\vec{\omega}$ resp. nositelka normální síly je vzhledem k bodu styku v nedeformovaném stavu posunuta o rameno valivého odporu proti pohybu tělesa v místě styku.
- 3) Při valení konstantní úhlovou rychlostí se práce stykové síly mění nevratně v teplo a energii zbytkové napjatosti ve stykovém útvaru.

Závěr:

Je-li z hlediska řešeného problému podstatné silové působení ve směru geometricky možného pohybu, pak pro styk musíme použít model NNTP a silové působení ve styku významně závisí na charakteru pohybu.

11.2 Uvolnění NNTP vazeb.

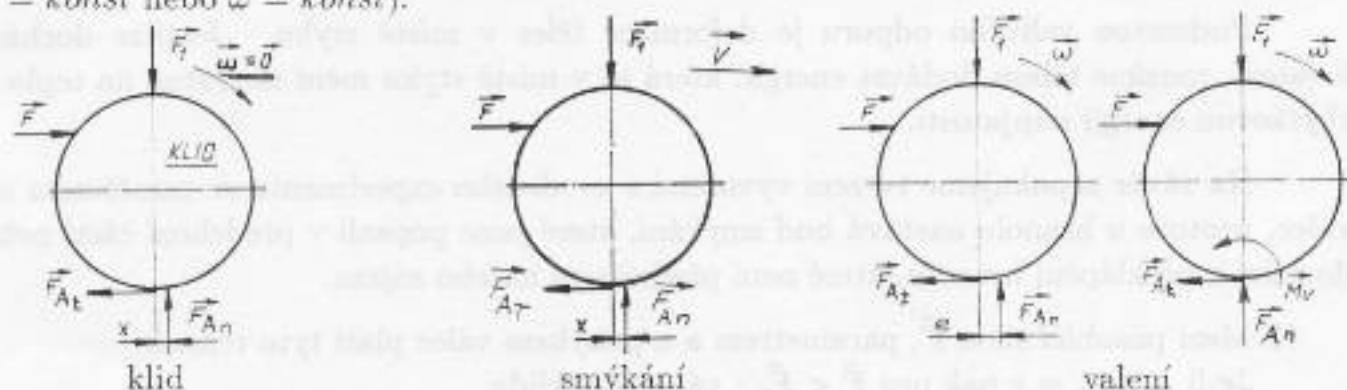
Základní vztahy silového působení pro nejjednodušší modely NNTP styku - Coulombovské tření a valení jsme vymezili v předchozím odstavci.

Dále se budeme zabývat uvolněním NNTP vazeb s uvedenými modely styku. Vzhledem k tomu, že silové působení v těchto případech významně závisí na charakteru pohybu, musíme při uvolňování vazeb uvažovat uložení a provedení vazby, které jsou z hlediska pohybu podstatné.

Podpora:

V případě druhého experimentu měla vazba mezi válcem a deskou charakter podpory. Poznatky, které jsme na základě druhého experimentu získali zopakujeme, doplníme a utřídíme.

Je-li těleso vázáno podporou, pak v podpoře může nastat klid, smýkání nebo valení. Skutečný pohybový stav závisí na uložení tělesa a silovém působení na těleso. Jestliže v podpoře nastává mechanický klid nebo smýkání, pak vazba odnímá tělesu jeden stupeň volnosti, v případě valení dva, protože otáčení kolem osy z a posuv ve směru osy x jsou lineárně závislé. Tato závislost je popsána vztahem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Uvolnění tělesa pro jednotlivé pohybové stavy, za předpokladu, že se těleso pohybuje konstantní rychlostí. ($\vec{v} = \text{konst}$ nebo $\vec{\omega} = \text{konst}$).



Závěry experimentu

$$F_{AT} = f F_{An}$$

$$\vec{e}_v = -\vec{e}_{F_{AT}}$$

$$e = \text{konst.} \quad M_v = F_{An} e$$

$$e - \text{proti } \vec{\omega}$$

$$\vec{e}_{M_v} = -\vec{e}_{\omega}$$

Množina NP

$$NP = \{F_{At}, F_{An}, x\}$$

$$\mu = 3$$

$$NP = \{F_{An}, x\}$$

$$\mu = 2$$

$$NP = \{F_{At}, F_{An}\}$$

$$\mu = 2$$

Počet odebraných stupňů volnosti

$$\xi = 1$$

$$\xi = 1$$

$$\xi = 2$$

Podmínky pohybového stavu

$$F a < F_{An} e$$

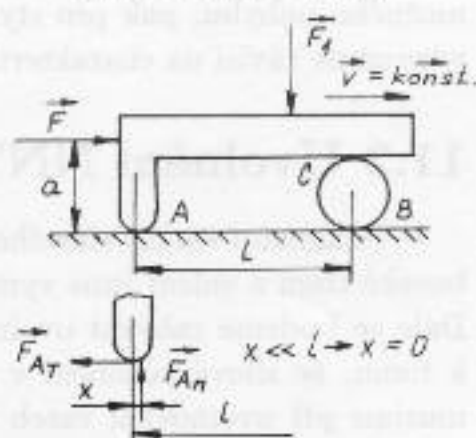
$$F < F_{AT} = f F_{An}$$

$$x < e$$

$$F_{At} < F_{AT} = f F_{An}$$

Při uvolňování nevíme, jaký pohybový stav ve vazbě nastane. Je-li z hlediska uložení tělesa možné valení, pak předpokládáme valení, protože je pravděpodobnější než smýkání a po určení neznámých parametrů zkontrolujeme podmínku pohybového stavu v tomto případě valení. Podmínka valení má tvar $F_{At} < F_{AT} = f F_{An}$.

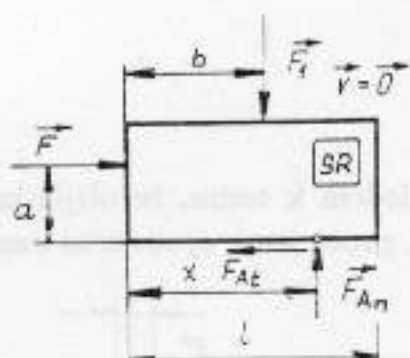
Je-li v podpoře možné pouze smýkání, pak vyosení nositelky normální síly je z hlediska řešeného problému u většiny případů nepodstatné. Viz obr. 138.



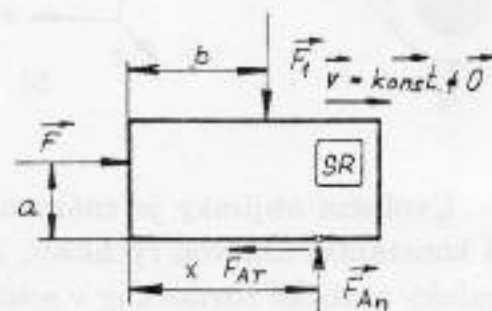
Obr. 138

Posuvná vazba:

Vazba mezi bránou a podložkou u prvního i druhého experimentu měla charakter posuvné vazby. U jednostranné posuvné vazby z pohybového hlediska může nastat klid, smýkání nebo může dojít ke zrušení vazby. Posuvná vazba odebírá tělesu dva stupně volnosti. Uvolnění tělesa vázaného posuvnou vazbou pro jednotlivé pohybové stavy, za předpokladu, že při smýkání se těleso pohybuje rychlostí $\vec{v} = \text{konst.} \neq 0$, a odpovídající vztahy a závislosti jsou dále uvedeny.



klid



smýkání

Uvolnění Závěry experimentu

Množina NP

$$NP = \{F_{At}, F_{An}, x\}$$

$$\mu = 3$$

Počet odebraných stupňů volnosti

$$\xi = 2$$

Podmínky pohybového stavu

$$F_{At} < F$$

$$x < l$$

$$F_{AT} = f F_{An}$$

$$\vec{e}_{F_{AT}} = -\vec{e}_v$$

$$NP = \{F_{An}, x\}$$

$$\mu = 2$$

$$\xi = 2$$

$$\vec{v} \neq 0$$

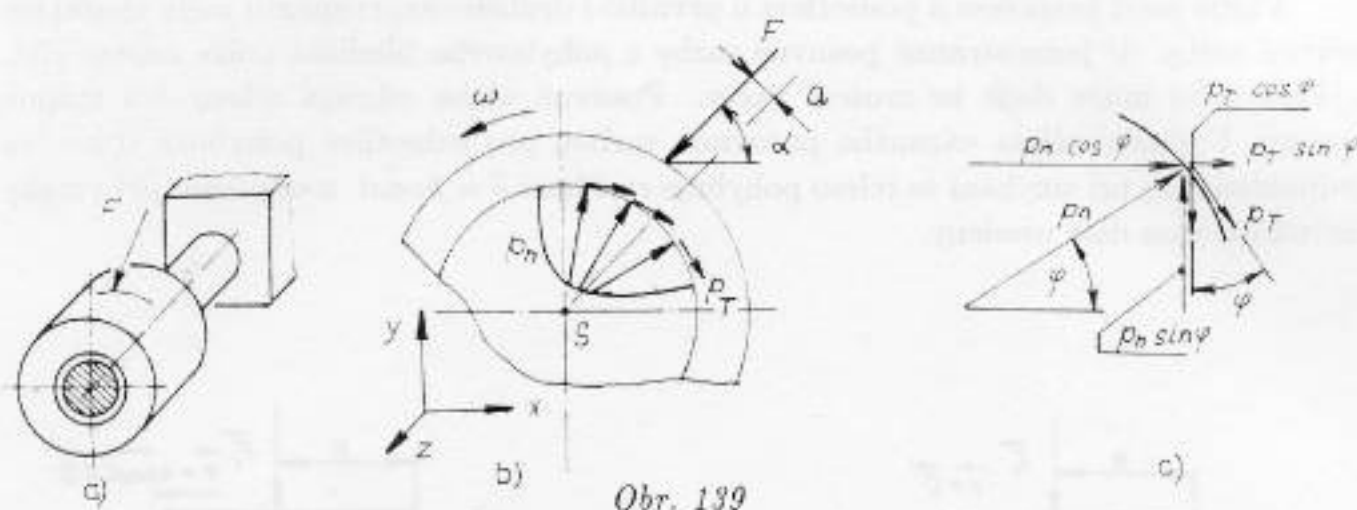
$$x < l$$

Rotační vazba:

U podpory a posuvné vazby jsme při uvolňování uvažovali pouze výsledné silové působení. Tento postup jsme zvolili proto, že základní poznatky o silovém působení ve styku jsme určili z experimentu, provedeného na úrovni výsledného silového působení.

U rotační vazby za pohybu dochází mezi tělesy ke smýkání ve válcové ploše. Podstatu smýkání na úrovni Coulombovského tření jsme popsali u prvního experimentu. Závěry, ke kterým jsme dospěli, využijeme pro řešení silových poměrů v rotační vazbě.

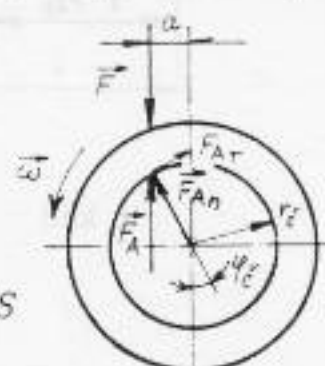
při uvažování NNTP styku.



Obr. 139

Uvolnění objímky je znázorněno na obr. 139b. Vzhledem k tomu, že objímka se otáčí konstantní úhlovou rychlostí, je ve statické rovnováze, proto jsme oprávněni napsat podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru.

$$\begin{aligned} F_x : -F \cos \alpha + \int_{\Gamma_s} (p_n \cos \varphi + p_T \sin \varphi) dS &= 0 \\ F_y : -F \sin \alpha + \int_{\Gamma_s} (p_n \sin \varphi - p_T \cos \varphi) dS &= 0 \\ M_{zS} : Fa - \int_{\Gamma_s} r_{\xi} p_T dS &= 0 \\ \text{přičemž } p_T &= f p_n; \quad M_{\xi} = \int_{\Gamma_s} r_{\xi} p_T dS = \int_{\Gamma_s} r_{\xi} f p_n dS \end{aligned}$$



Obr. 140

M_{ξ} - nazýváme momentem čepového tření

Vztah pro určení momentu čepového tření je jednoduchý, jeho použití však předpokládá znalost stykové oblasti Γ_s a rozložení normálního tlaku $p_n(\varphi)$. Rozložení normálního tlaku a stykovou oblast určíme řešením kontaktního problému, který patří k složitým úlohám mechaniky těles, přesahující rámec základního studia na VUT.

Rotační vazba patří k nejběžnějším a nejvýznamnějším vazbám ve strojírenství, proto pro určení silového působení v rotační vazbě na úrovni NNTP styku a výsledného silového působení, (viz obr. 140) se používá následující postup. Moment čepového tření určíme ze vztahu:

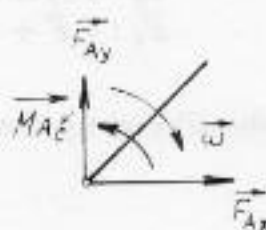
$$(11.4) \quad M_{\xi A} = F_{AT} r_{\xi} = r_{\xi} F_A \sin \varphi_{\xi} = r_{\xi} f_{\xi} F_A = r_{\xi} f_{\xi} \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

M_{ξ} - Moment čepového tření působí proti relativnímu pohybu těles vázaných rotační vazbou.

f_{ξ} - nazýváme součinitelem čepového tření, který závisí na f a na rozložení p_n . Hodnotu součinitele čepového tření určujeme experimentem.

F_{Ax}, F_{Ay} - souřadnice stykové síly, které určíme z podmínek statické rovnováhy.

Tělesa vázaná rotační vazbou při uvažování styku NNTP mohou být v klidu nebo v pohybu. Dále uvedeme uvolnění pro jednotlivé pohybové stavy.



Uvolnění

klid

smýkání

Závěry experimentu

$$M_{Axi} = r \ell f \ell \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

$$\vec{e}_{Mxi} = -\vec{e}_\omega$$

Množina NP

$$NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}, M_A\}$$

$$\mu = 3$$

$$NP = \{F_{Ax}, F_{Ay}\}$$

$$\mu = 2$$

Počet odebraných stupňů volnosti

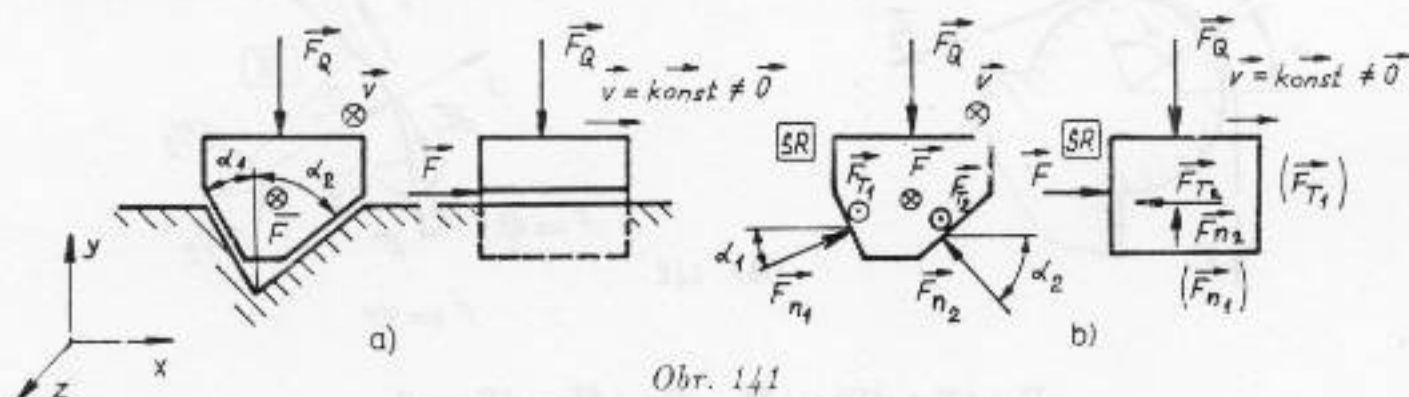
$$\xi = 2$$

$$\xi = 2$$

11.3 Řešení spojení strojních součástí s NNTP stykem.

Těleso v klínové drážce.

Těleso T je vázáno se základním tělesem posuvnou vazbou, přičemž stykovou plochu tvoří klínová drážka (vedení stolů obráběcích strojů atd.) viz obr. 141a. Naším úkolem je odvodit vztah pro velikost síly \vec{F} na dané nositelce, pohybuje-li se těleso rovnoměrným přímočarým pohybem. Součinitel smykového tření mezi tělesy je $f = \text{konst}$. Geometrická konfigurace a zatížení jsou zřejmé z obr. 141a.



Obr. 141

Těleso T se pohybuje v klínové drážce konstantní rychlostí \vec{v} , je tedy ve statické rovnováze. Po uvolnění tělesa viz obr. 141b sestavíme podmínky statické rovnováhy

v souřadnicovém tvaru.

$$\begin{aligned} F_x : F_{n1} \cos \alpha_1 - F_{n2} \cos \alpha_2 &= 0 \\ F_y : F_{n1} \sin \alpha_1 + F_{n2} \sin \alpha_2 - F_Q &= 0 \\ F_z : -F + (F_{n1} + F_{n2})f &= 0 \end{aligned}$$

Vhodnými algebraickými úpravami z první a druhé rovnice rovnováhy obdržíme

$$(11.5) \quad F_{n1} = F_Q \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad F_{n2} = F_Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

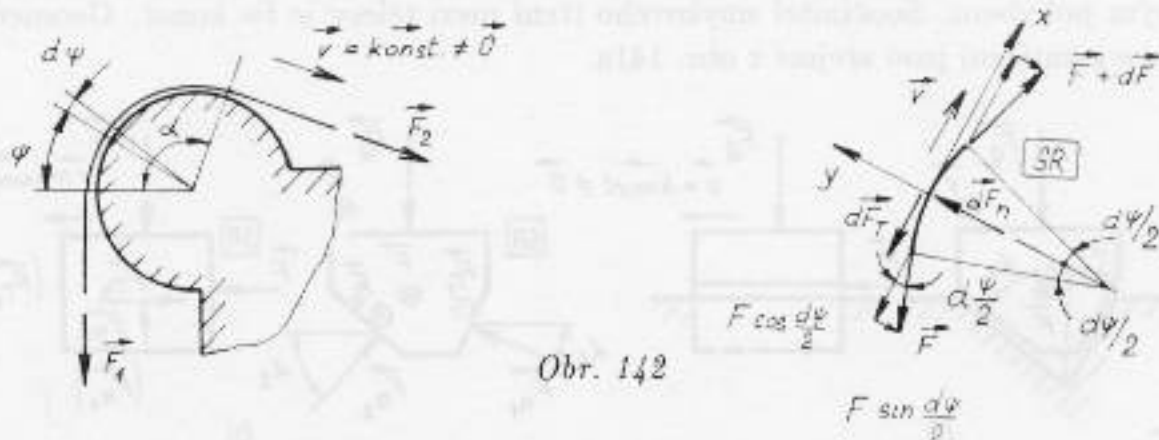
Po dosazení do silové podmínky rovnováhy ve směru osy z dostáváme:

$$(11.6) \quad F = F_Q f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Tento vztah můžeme formálně upravit na tvar $F = F_Q f_T$, kde $f_T = f \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$ se nazývá součinitel tření v klínové drážce.

Vláknové (pásové) tření:

Při pohybu lan, řemenů, ocelových pásů po zakřivených plochách těles dochází ve stykových plochách ke smýkání, které nazýváme pásové nebo vláknové tření (pásové brzdy, smýkání lana po pevné kladce atd.). Vztah pro vláknové tření odvodíme pro dokonale ohebné, neproduzitelné vlákno pohybující se po vypuklé ploše tělesa konstantní rychlostí. Tíha vlákna vzhledem k ostatním silám je nepodstatná. Součinitel smykového tření předpokládáme konstantní. Protože se vlákno pohybuje konstantní rychlostí, je každý element vlákna ve statické rovnováze. Vztah pro vláknové tření odvodíme z podmínek statické rovnováhy uvolněného elementu viz obr. 142b



$$\begin{aligned} F_x : (F + dF) \cos \frac{d\psi}{2} - F \cos \frac{d\psi}{2} - dF_T &= 0 \\ F_y : dF_n - (F + dF) \sin \frac{d\psi}{2} - F \sin \frac{d\psi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$dF_T = f dF_n$$

Po dosazení $\cos \frac{d\psi}{2} \doteq 1$, $\sin \frac{d\psi}{2} \doteq \frac{d\psi}{2}$, algebraických úpravách a vyloučení diferenciálních veličin vyšších řádů obdržíme:

$$\left. \begin{aligned} dF - f dF_n &= 0 \\ dF_n - F d\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow dF - f F d\psi = 0 \quad \frac{dF}{F} = f d\psi \quad \int_1^2 \ln \frac{F_2}{F_1} = f \alpha \quad (11.7)$$

$$\boxed{F_2 = F_1 e^{f\alpha}}$$

Silové působení na šroubu.

Silové působení na šroubu je závislé na konkrétním provedení profilu závitu, který ovlivňuje geometrii styku a rozložení stykového tlaku. Ilustrativní odvození provedeme pro trapézový profil závitu. Cílem řešení je určit velikost momentu silové dvojice, která způsobí otáčení šroubu v pevné matici konstantní úhlovou rychlostí, je-li šroub zatížený silou \vec{F} . Odvození provedeme za předpokladu rovnoměrného rozložení tlaku ve stykové ploše. Na obrázku 143b je znázorněný uvolněný element šroubu, pro který napíšeme podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru.

$$\begin{aligned} F_x: dF - dF_T \cos \alpha - dF_n \sin \alpha &= 0 \\ F_y: -dF_Q + dF_n \cos \alpha - dF_T \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$dF_T = f dF_n$$

Jednoduchou algebraickou úpravou obdržíme:

$$\begin{aligned} dF &= dF_Q \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = dF_Q \frac{f + \tan \alpha}{1 - f \tan \alpha} = \\ &= dF_Q \frac{\tan \varphi + \tan \alpha}{1 - \tan \varphi \tan \alpha} = dF_Q \tan(\alpha + \varphi) \end{aligned}$$

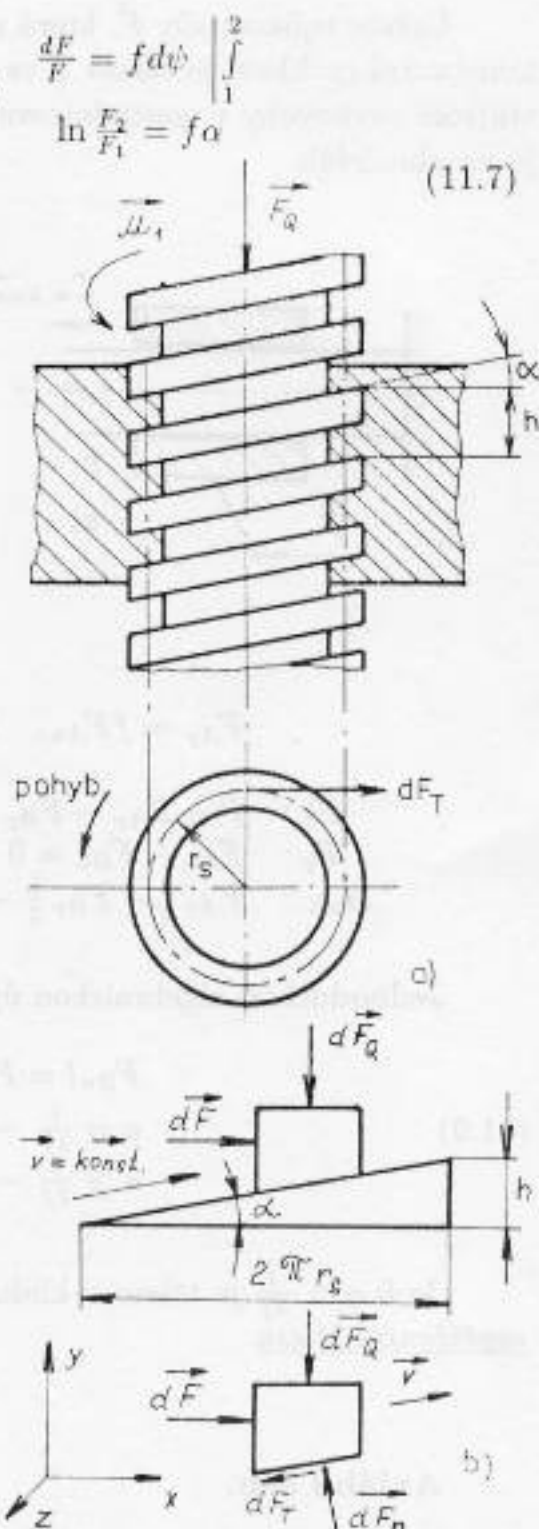
$$dF = dF_Q \tan(\alpha + \varphi) \quad \text{— pro zvedání}$$

$$dF = dF_Q \tan(\alpha - \varphi) \quad \text{— pro spouštění}$$

Velikost momentu silové dvojice určíme ze vztahu:

$$M_{1,2} = \int_0^{F_Q} r_s \tan(\alpha \pm \varphi) dF_Q = r_s F_Q \tan(\alpha \pm \varphi) \quad (11.8)$$

Je-li $\alpha < \varphi$ pak $\tan(\alpha - \varphi) < 0 \Rightarrow M_2 < 0$ - ke spouštění musíme působit opačnou silovou dvojicí. Pokud $M_2 = 0$ pak pohyb nenastává, nedochází k samovolnému spouštění. V tomto případě je šroub samosvorný.

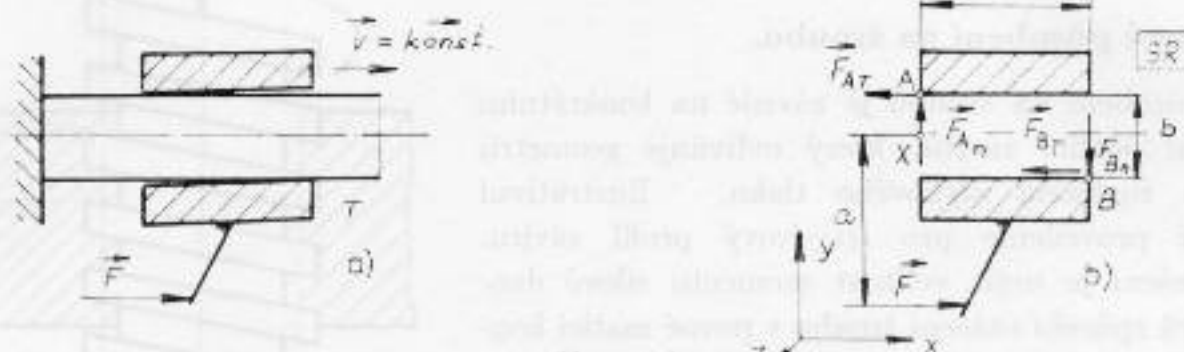


Obr. 143

Silové působení v dalších dvou spojeních určíme formou řešení úlohy.

Oboustranná posuvná vazba.

Určete velikost síly \vec{F} , která způsobí pohyb tělesa T rychlostí $\vec{v} = \text{konst.}$ Při pohybu konstantní rychlostí je těleso T ve statické rovnováze. Velikost síly \vec{F} určíme z podmínky statické rovnováhy v souřadnicovém tvaru za předpokladu $f_A = f_B = f$. Uvolnění tělesa je na obr. 144b.



Obr. 144

$$F_{AT} = fF_{An}, \quad F_{BT} = fF_{Bn}$$

$$\begin{aligned} F_x: \quad F - F_{AT} - F_{BT} &= 0 & \longrightarrow F &= f(F_{An} + F_{Bn}) \\ F_y: \quad F_{An} - F_{Bn} &= 0 & \longrightarrow F_{An} &= F_{Bn}, \quad F = 2fF_{Bn} \\ M_{xX}: \quad F_{AT} \frac{b}{2} - F_{BT} \frac{b}{2} - F_{Bn}l + Fa &= 0 \end{aligned}$$

Jednoduchou algebraickou úpravou obržíme:

$$\begin{aligned} F_{Bn}l &= Fa, \quad \frac{F}{2f}l = Fa \implies \\ (11.9) \quad a &= \frac{l}{2f} \text{ — těleso se pohybuje } \vec{v} = \text{konst.} \\ a &> \frac{l}{2f} \text{ — těleso je v klidu} \end{aligned}$$

Je-li $a > \frac{l}{2f}$ je těleso v klidu pro libovolnou velikost síly \vec{F} — tento stav nazýváme vzpříčením tělesa.

Axiální čep.

Odvoďte vztahy pro velikost momentu M silové dvojice, která způsobí otáčení tělesa T zatíženého silou \vec{F}_Q úhlovou rychlostí $\vec{\omega} = \text{konst.}$, jestliže pro smýkání ve stykové ploše můžeme použít model Coulombovského tření.

Pro Coulombovské tření platí: $dF_T = f dF_n$, $\vec{e}_{FT} = -\vec{e}_v$. Třecí síla je závislá na rozložení tlaku ve stykové ploše. Vzhledem k obtížnosti určení stykových tlaků (kontaktní problém), používají se pro běžné strojírenské problémy vztahy určené na základě zkušeností ve tvaru:

$p = \text{konst.}$ - u nezaběhaných čepů

$pr = \text{konst.}$ - u zaběhaných čepů

a) **Nezaběhaný čep:**

$$p = \frac{F_Q}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = \text{konst.},$$

$$dS = 2\pi r dr, \quad dF_n = 2\pi r dr p$$

$$dM_\ell = dF_T r = f dF_n r = \frac{2r^2 dr F_Q f}{(r_2^2 - r_1^2)}$$

$$M_\ell = \int_{r_1}^{r_2} dM_\ell = \frac{2F_Q f}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{2}{3} F_Q f \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$M = M_\ell$$

b) **Zaběhaný čep:**

$$pr = \text{konst.} = K$$

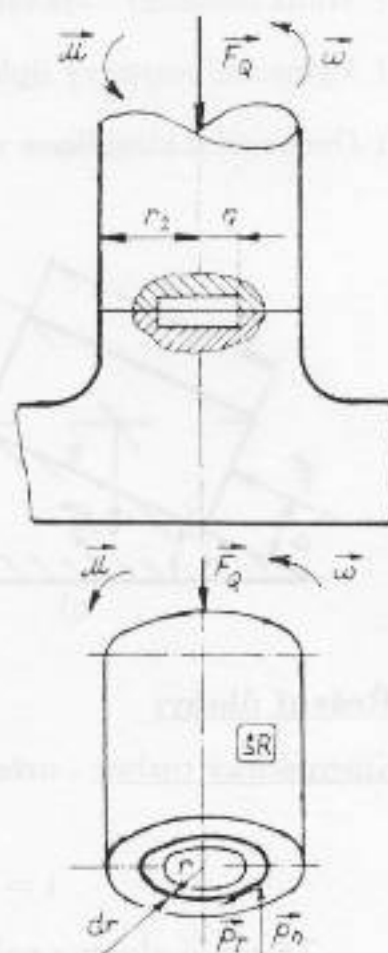
$$F_Q - \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr p = 0, \quad F_Q - K 2\pi(r_2 - r_1) = 0$$

$$pr = K = \frac{F_Q}{2\pi(r_2 - r_1)}$$

$$dM_\ell = dF_T r = f r dF_n = f r p 2\pi r dr = f r 2\pi K dr$$

$$M_\ell = \int_{r_1}^{r_2} dM_\ell = \frac{F_Q f}{2(r_2 - r_1)} (r_2^2 - r_1^2) = F_Q f \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$M = M_\ell$$



Obr. 145

11.4 Řešení statické rovnováhy tělesa a soustav těles s vazbami typu NNTP.

Pro řešení statické rovnováhy tělesa a soustav těles s vazbami typu NNTP platí stejný postup, který jsme uvedli v kapitole 8 a 9 s tím, že respektujeme podstatné rozdíly charakteristik styku, kterými jsme se detailně zabývali v předchozích odstavcích této kapitoly. Proto postup řešení ukážeme na konkrétních úlohách.

Úloha I.

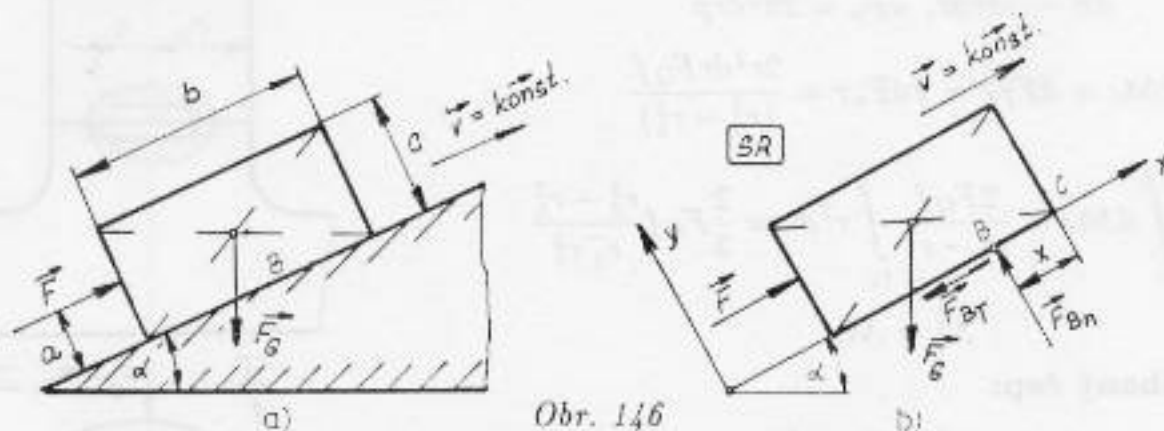
1. Zadání:

Určete velikost síly \vec{F} tak, aby těleso podle obrázku 146a se pohybovalo konstantní rychlostí \vec{v} v naznačeném směru a smyslu. Pro styk je nutné použít model NNTP styku.

2. Rozbor úlohy:

a) Zadání je úplné a správné. Úloha je zadána obecně.

- b) Úloha je zadána jako rovinná.
 c) Volba označení - viz obr. 146.
 d) Vymezení soustavy úplně zadáných silových prvků. $\pi = \{\vec{F}_G\}$
 e) Označení a klasifikace vazeb. B - p.k.d - $\xi = 2$



3. Řešení úlohy:

- a) Kinematický rozbor - určení pohyblivosti

$$i = i_v - (\sum \xi_i - \eta)$$

$$i = 3 - (2 - 0) = 1 \Rightarrow \boxed{i = 1, \eta = 0}$$

Těleso je uloženo pohyblivě bez omezení deformačních parametrů.

Statická rovnováha je zajištěna stykovými vazbami a podmínkou konstantní rychlosti ve směru geometricky možného pohybu.

- b) Uvolnění tělesa. Viz obr. 146b. U uvolněného tělesa **nesmí chybět znázornění pohybu**. Chybí-li je uvolnění zásadně chybné.

- c) Statický rozbor:

α) Zvolíme souřadnicový systém. Libovolně, ale z hlediska řešeného problému vhodně.

β) Vymezení soustavy neúplně zadáných silových prvků π_R , množiny neznámých nezávislých parametrů NP a jejich počtu μ .

$$\pi_R = \{\vec{F}, \vec{F}_B\}$$

$$NP = \{F, F_{B_x}, x\}$$

Počet NP je $\mu = 3$, z toho $\mu_F = 2, \mu_r = 1$.

γ) Klasifikace soustavy $\pi_\nu = \pi \cup \pi_R$ a určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy ν .

$$\pi_\nu = \{\vec{F}, \vec{F}_G, \vec{F}_B\} - \text{obecná rovinná silová soustava}$$

V souladu s odst. 6.4 je počet použitelných statických podmínek v základní tvaru

$$\nu = 3, (\nu_F = 2, \nu_M = 1),$$

δ) Ověření nutné podmínky statické určitosti.

$$\mu = \nu \wedge \mu_r + \mu_M \leq \nu_M$$

V případě zadané úlohy je $\mu = 3, \nu = 3, \mu_r = 1, \nu_M = 1 \Rightarrow$ nutná podmínka statické určitosti je splněna a má smysl pokračovat ve statickém řešení.

d) Sestavení statických rovnic

$$\begin{aligned} F_x : F - F_{B_r} - F_G \sin \alpha &= 0 \\ F_y : F_{B_n} - F_G \cos \alpha &= 0 \\ M_{z_C} : F_G \cos \alpha \frac{b}{2} + F_G \sin \alpha \frac{c}{2} - F_{B_n} x - Fa &= 0 \end{aligned}$$

e) Rozbor soustavy statických rovnic

Jedná se o soustavu tří lineárních nehomogenních rovnic o třech neznámých.

f) Řešení soustavy statických rovnic.

Vstupní údaje: a, b, c, α, F_G

Výstupní údaje: F, F_{B_n}, x

Výstupní údaje určíme buď s použitím malé výpočetní techniky (kalkulačka) nebo na počítači.

4. Zhodnocení výsledků řešení:

1) Kontrola funkčnosti vazeb:

Vazba B: Je funkční je-li $F_{B_n} > 0$ - síla je orientována do tělesa

$$\text{a } 0 \leq x \leq b$$

Vzhledem k tomu, že úlohu řešíme obecně nemůžeme provést konkrétní hodnocení.

5. Formulace závěru

Určením F je zadání v plném rozsahu splněno.

Řešená úloha má charakter úlohy o statickém řešení.

Úloha II.

Zadání:

Určete charakter pohybu a velikost síly \vec{F} , má-li se soustava těles podle obrázku 147a pohybovat v naznačeném směru a smyslu konstantní rychlostí. Pro styk je nutné použít model NNTP styku.

Rozbor zadání:

- Soustava je zadaná obecně. Geometrie soustavy, vazby a silové prvky $\vec{F}_{G_1}, \vec{F}_{G_2}$ jsou zadány úplně a správně.
- Úloha je zadána jako rovinná.
- Volba označení - viz obr. 147a

d) Klasifikace členů

2 - binární zatížený člen

3 - binární zatížený člen

Soustava neobsahuje degenerovaný člen

e) Klasifikace vazeb

A - podpora - předpokládáme valení $\xi_i = 2$

B - rotační k.d (r.k.d) - $\xi_i = 2$

C - podpora - geometricky možné smýkání $\xi_i = 1$

f) Určení pohyblivosti soustavy

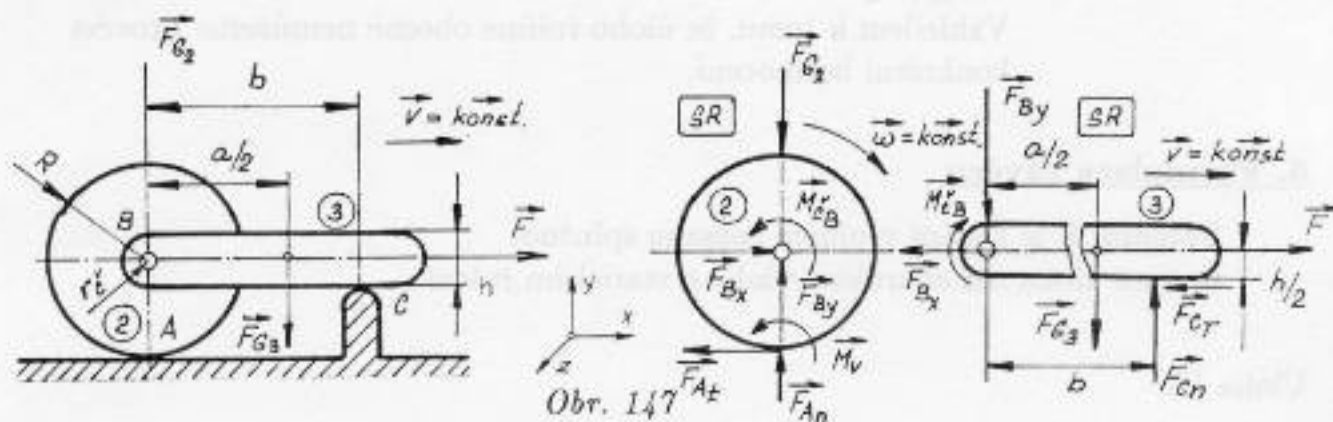
Počet členů soustavy $n = 3$, předpokládaný počet omezených deformačních parametrů $\eta = 0$.

$$i = (n - 1)i_v - \left(\sum_{i=1}^n \xi_i - \eta \right) = (3 - 1)3 - (5 - 0) = 0$$

Soustava je uložena pohyblivě bez omezení deformačních parametrů. Statická rovnováha je zajištěna stykovými vazbami a podmínkou konstantní rychlosti v geometricky možném směru.

Řešení:

b) Uvolnění jednotlivých těles soustavy. Tělesa uvolňujeme s respektováním principu akce a reakce.



c) Statický rozbor

I. Určení soustavy úplně zadaných a neúplně určených silových prvků a množiny neznámých nezávislých parametrů.

$$\begin{aligned} \pi &= \{\vec{F}_{G_2}, \vec{F}_{G_3}\} & \pi_R &= \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C\} \\ NP &= \{F_{A_n}, F_{A_t}, F_{B_x}, F_{B_y}, F_{C_n}, F\} \\ \mu_F &= 6, & \mu_M &= 0, & \mu &= 6 \end{aligned}$$

II. Určení počtu použitelných podmínek statické rovnováhy

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_2}, \pi_{\nu_3} &- \text{rovinné obecné soustavy} \Rightarrow \\ \nu_i &= 3 & \nu &= \sum \nu_i = 6; & \nu_F &= 4; & \nu_M &= 2 \end{aligned}$$

III. Ověření nutné podmínky statické určitosti

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \nu \\ 6 = 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mu_M + \mu_r \leq \nu_M \\ 0 < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Nutná podmínka statické určitosti} \\ \text{je splněna, má smysl pokračovat} \\ \text{ve statickém řešení} \end{array}$$

d) Sestavení podmínek statické rovnováhy:

Těleso 2

$$\begin{aligned} F_x: F_{Bx} - F_{At} &= 0 \\ F_y: F_{An} + F_{By} - F_{G_2} &= 0 \\ M_{zB}: M_{\ell B} + M_v - F_{At}R &= 0 \\ M_{\ell B} &= f_{\ell} \cdot r_{\ell} \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2}; \quad M_v = F_{An}e \end{aligned}$$

Těleso 3

$$\begin{aligned} F_x: F - F_{Bx} - F_{Cr} &= 0 \\ F_y: F_{Cn} - F_{G_3} - F_{By} &= 0 \\ M_{zB}: -F_{G_3} \frac{a}{2} + F_{Cn}b - F_{Cr} \frac{b}{2} - M_{\ell B} &= 0 \\ F_{Cr} &= f F_{Cn} \end{aligned}$$

- e) Rozbor soustavy statických rovnic. Soustava statických rovnic je nelineární.
- f) Řešení soustavy statických rovnic:
- g) Rozbor řešení úlohy: Řešení jsme provedli za předpokladu, že ve vazbě A nastane valení. Tento předpoklad je splněn, jestliže je splněna podmínka valení $F_{At} < F_{Ar} = f \cdot F_{An}$. Pokud podmínka valení splněna není ve vazbě A nastává smýkání a řešení musíme opakovat. Podmínku valení je nutné formálně zkontrolovat i když je úloha zadána obecně.

Obsah:

Předmluva:

Kapitola 1.0

1.0 Úvod	3
1.1 Mechanika těles a fyzika	3
1.2 Vědecká metoda	4
1.3 Srovnání předmětu přírodních a technických věd	6
1.4 Problémy, řešení problémů, inženýrství	7
1.5 Mechanika těles jako předmět na fakultě strojní	9

Kapitola 2.0

2.0 Axiomy mechaniky těles se zaměřením na statiku	11
--	----

Kapitola 3.0

3.0 Základní pojmy mechaniky těles se zaměřením na statiku	15
3.1 Konkretizace obecných pojmů z hlediska mechaniky těles a pojmy mechaniky těles.	17
3.2 Interakce a vazba	19
3.3 Interakce, silové působení, síla	20
3.4 Těleso volné, vázané a uvolněné	21

Kapitola 4.0

4.1 Vymezení předmětu mechaniky	26
4.2 Silové působení a síla působící na těleso	27
4.3 Soustava silového působení a silová soustava	30
4.4 Moment síly k bodu a k ose	32

Kapitola 5.0

5.0 Statická ekvivalence a rovnováha	39
5.1 Soustavy silového působení	43
5.2 Typy silových soustav podle prostorového uspořádání	51
5.3 Typy silových soustav podle statických a pohybových charakteristik.	58
5.4 Typy silových soustav podle odchylek	62
5.5 Typy silových soustav podle úplnosti zadání	64

Kapitola 6.0

6.1 Podmínky statické ekvivalence	73
6.2 Podmínky statické rovnováhy tělesa	74
6.3 Vlastnosti statických podmínek	76
6.4 Statické podmínky pro zvláštní	84

Kapitola 7.0

7.1 Styk těles a geometrie styku	89
7.2 Silové a kinematické charakteristiky NNTN vazeb	95
7.3 Uvolňování vazeb NNTN.	99
7.4 Uložení vázaného tělesa	105
7.5 Typy statických úloh	113
7.6 Určení tíhové síly	116

Kapitola 8.0

8.1 Řešení statické rovnováhy vázaného tělesa	121
---	-----

Kapitola 9.0

9.1 Charakteristiky soustav těles	126
9.2 Pojmy vztahující se k soustavám těles	130
9.3 Statické řešení soustav těles vázaných stykovými vazbami typu NNTN.	131
9.4 Zvláštní případy soustav těles	136
9.5 Prutové soustavy	137

Kapitola 10.0

10.1 Základní věty grafického řešení	142
10.2 Základní konstrukce odvozené z vět o dvou a o třech silách a věty o superpozici.	146
10.3 Grafické řešení statické rovnováhy vázaného tělesa	153
10.4 Grafické řešení statické rovnováhy soustav těles	155

Kapitola 11.0

11.1 Vazby typu NNTP - pasivní	162
11.2 Uvolnění NNTP vazeb	167
11.3 Řešení spojení strojních součástí s NNTP stykem	171
11.4 Řešení statické rovnováhy tělesa a soustav těles s vazbami typu NNTP.	175
Literatura	180