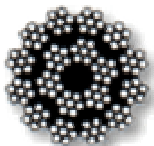
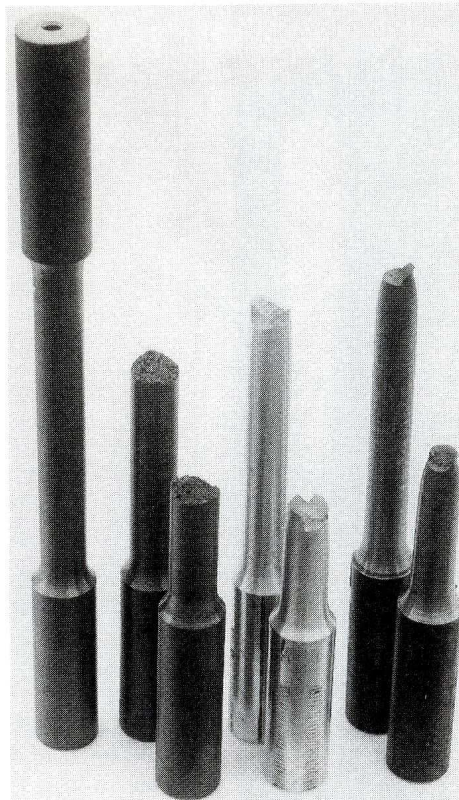
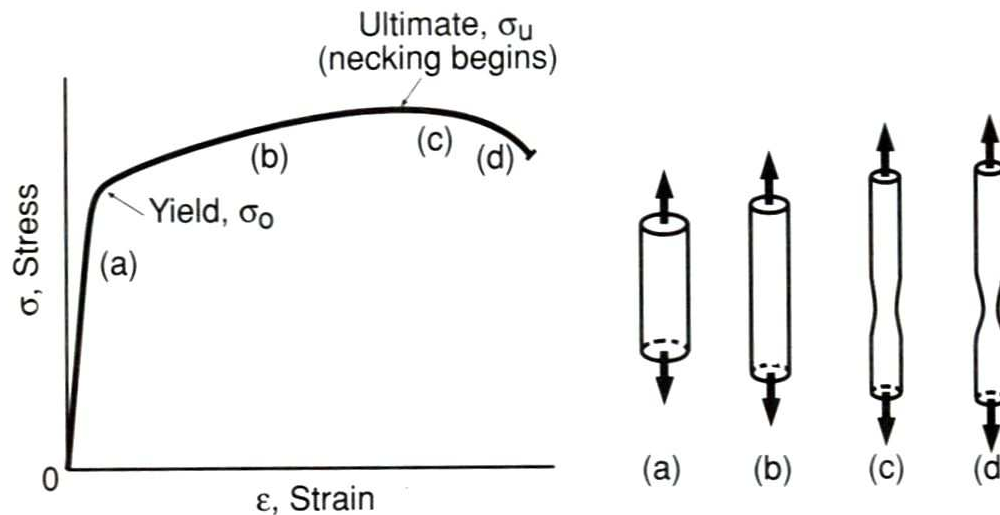


2. Mezní stav pružnosti obecného trojdimensionálního tělesa

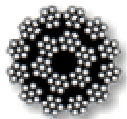


Mezní stavy spojené s plastickou deformací

- **Mezní stav pružnosti** - je to stav, při jehož překročení začnou vznikat nevratné makroplastické deformace. (přechod oblasti **a-b**)
- **Mezní stav plastické stability** – je to stav, při jehož překročení se začnou plastické deformace soustředit do lokálních oblastí. (přechod oblasti **b-c**)
- **Mezní stav lomu tělesa** – je to stav, při jehož dosažení vzniká z jednoho celistvého tělesa více samostatných těles (konec tahového diagramu)



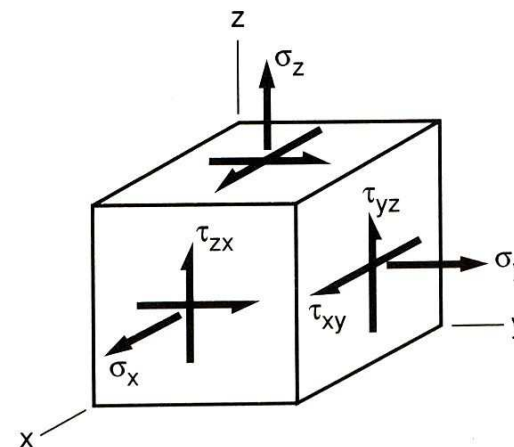
Tahový diagram [Dowling 1999]



Základní veličiny obecné pružnosti

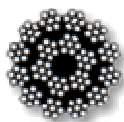
Základní veličiny:

- **Posuvy** ve směrech osy x, y, z – u, v, w
- **Napětí normálové a smykové** ve směrech osy x, y, z –
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$
- **Přetvoření** ve směrech osy x, y, z –
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$



Stav v každém bodě tělesa je tedy definován vektorem posuvů, tenzorem napětí a tenzorem deformace.

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



Základní vztahy obecné pružnosti

Složky tenzoru napětí musí splňovat diferenciální **rovnice rovnováhy** ty mají při zanedbání objemových sil tvar:

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} = 0$$

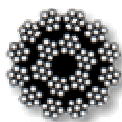
$$\frac{\delta \sigma_z}{\delta z} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta y} = 0$$

Vztahy mezi složkami vektoru posuvu a složkami tenzoru deformace jsou dány **Cauchyho vztahy**:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta z}$$



Základní vztahy obecné pružnosti

Konstitutivní vztahy platné pro lineární izotropní a homogenní materiál (**Hookův zákon**):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

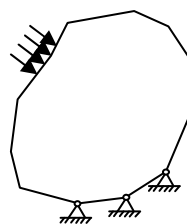
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Kde ν je Poissonovo číslo, E je modul pružnosti v tahu a G je modul pružnosti ve smyku.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Silové a deformační okrajové podmínky:

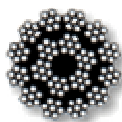


Ukázka deformačních podmínek:

$$u = \bar{u}$$

$$v = \bar{v}$$

$$w = \bar{w}$$



Rovinné úlohy

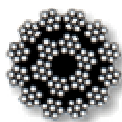
Rozeznáváme dva základní typy rovinných úloh:

a) Rovinná deformace (**Plane Strain**) – obecně charakterizuje stav napětí uvnitř tělesa

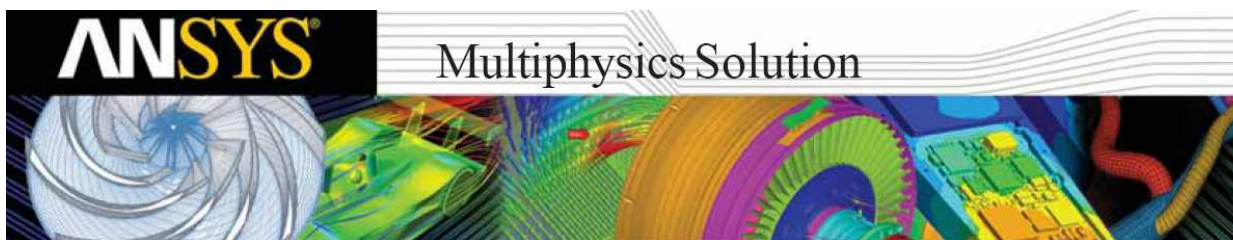
$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= 0 & \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xz} &= 0 & \tau_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 & \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$

b) Rovinná napjatost (**Plane Stress**) – obecně charakterizuje stav napětí u tenkých těles (plechy, pásy...)

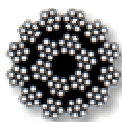
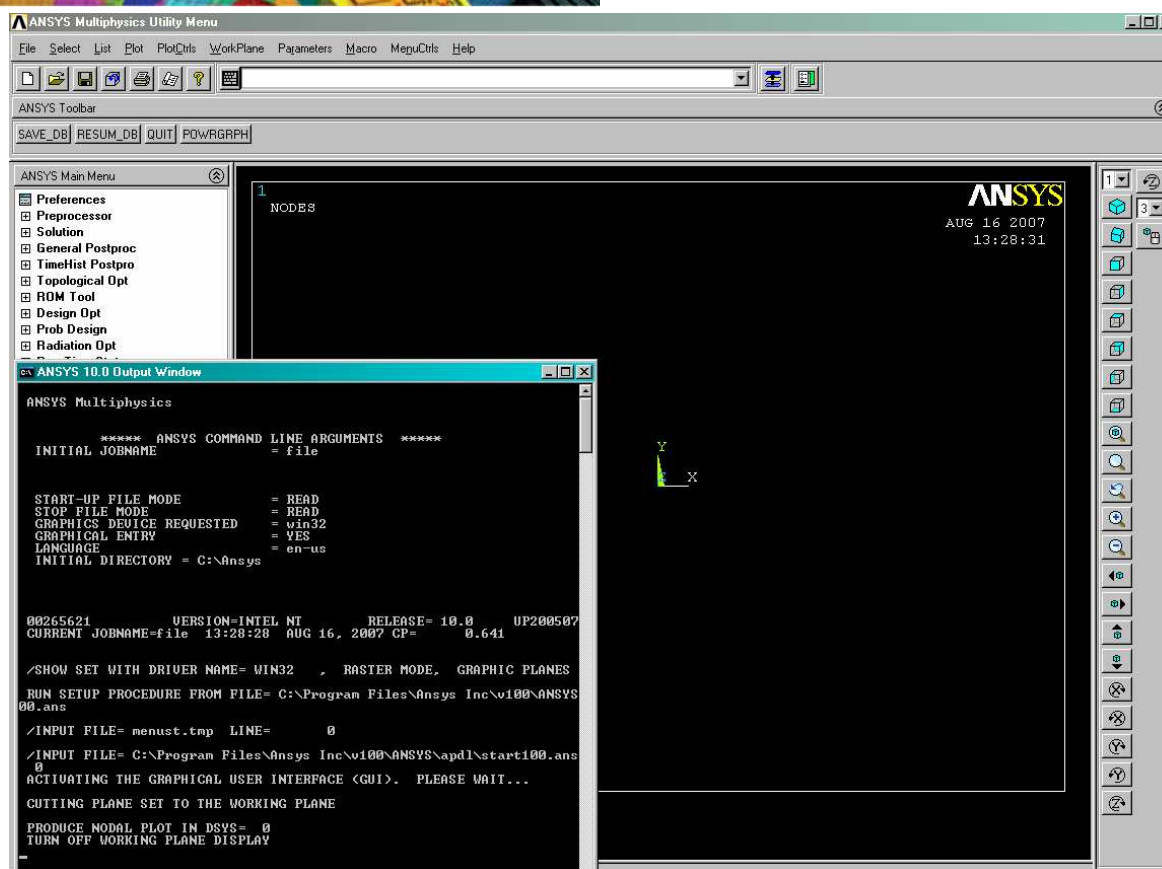
$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \sigma_z &= 0 \\ \gamma_{xz} &= 0 & \tau_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 & \tau_{yz} &= 0\end{aligned}$$



Metoda konečných prvků – software Ansys

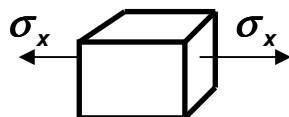


- deformační varianta metody konečných prvků
- možnost řešení většiny strukturálních nelineárních úloh
- možnost řešení sdružených úloh strukturálních, teplotních, elektromagnetických ... atd.

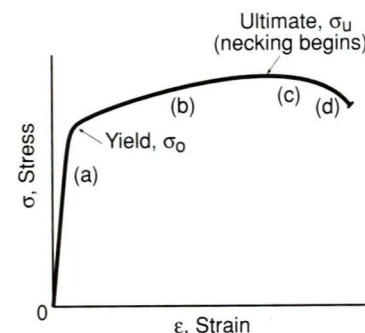


Mezní stav pružnosti

- Jednoosý tah

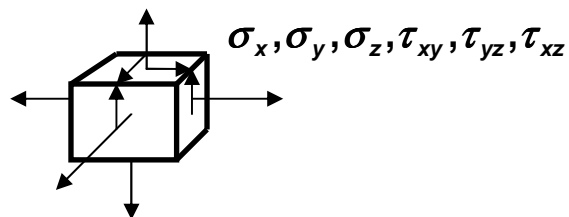


$$\sigma_x = \sigma_0$$



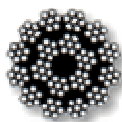
σ_0 - mez kluzu daného materiálu

- Obecná napjatost



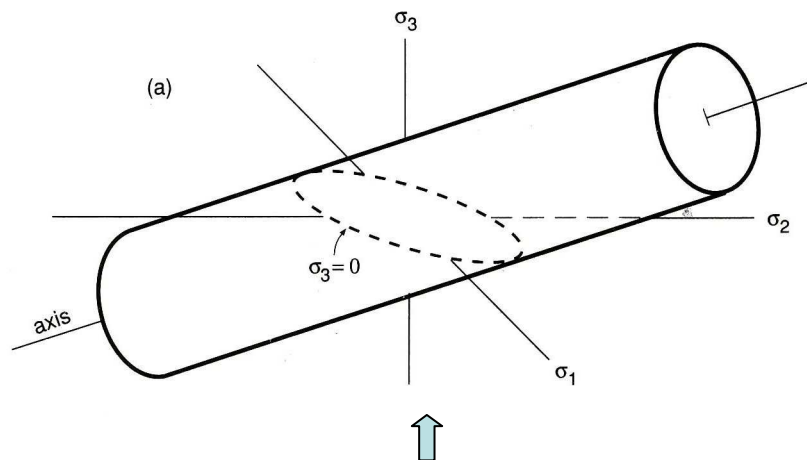
- Podmínka plasticity HMM (Hencky, Huber, Mises)
- mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování nastane, když oktaedrické napětí dosáhne mezní hodnoty.

- Podmínka plasticity max τ (maximálního smykového napětí)
- mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování nastane, když maximální smykové napětí dosáhne mezní hodnoty.



Podmínka plasticity HMH

- Podmínka plasticity HMH (Hencky, Huber, Mises) – (v ansysu **von mises stress**)
- mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování nastane, když oktaedrické napětí dosáhne mezní hodnoty.



Plocha plasticity HMH vykreslená v Haighově prostoru [Dowling 1999]

$$\tau_{ok} = \tau_{MS}$$

Redukované napětí vyjádřené pomocí hlavních napětí:

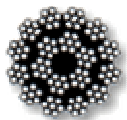
$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Redukované napětí vyjádřené pomocí všech složek napětí:

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

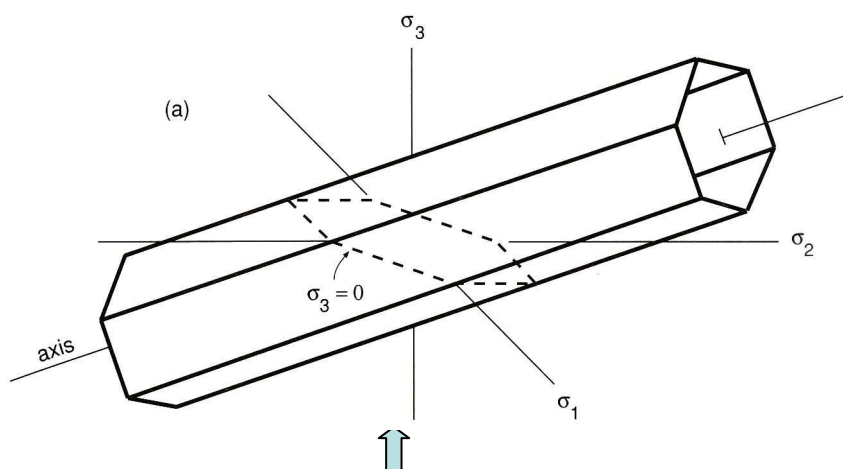
Podmínka plasticity HMH

$$\sigma_0 = \sigma_{red}$$



Podmínka plasticity max τ

- Podmínka plasticity max τ (maximální smykové napětí) – (v ansysu **stress intensity**)
- mezní stav pružnosti při monotónním zatěžování nastane, když maximální smykové napětí dosáhne mezní hodnoty.



Plocha plasticity vykreslená v Haighově prostoru [Dowling 1999]

$$\tau_{\max} = \tau_{MS}$$

Redukované napětí vyjádřené pomocí hlavních napětí:

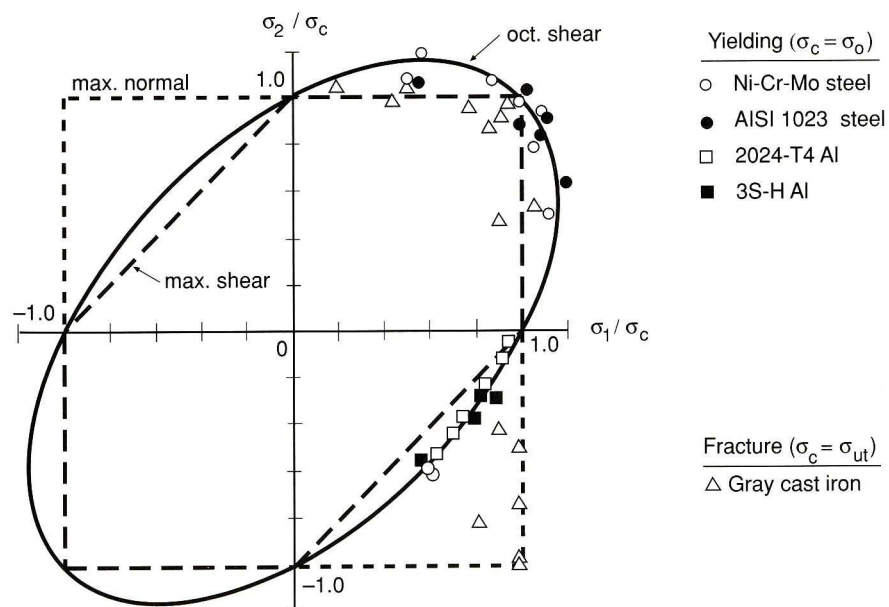
$$\sigma_{red} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

Podmínka plasticity max τ

$$\sigma_0 = \sigma_{red}$$



Porovnání podmínek plasticity



Ukázka porovnání podmínek plasticity max τ a HMH pro houževnaté oceli a hliníkové slitiny v porovnání s šedou litinou [Dowling 1999]



Použitá literatura:

- Dowling, E. N., Mechanical behavior of materials, Simon & Schuster Comp., New Jersey, 1999
- Norton, R. L., Machine design *An integrated approach*, Pearson, New Jersey, 2006
- Kunz, J., Základy lomové mechaniky, skripta ČVUT, 1994
- Vlk, M., Mezní stavy a spolehlivost, skripta VUT, 1991
- Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Mechanika těles pružnost a pevnost II, skripta VUT, 1991
- Janíček, P., Ondráček, E., Vrbka, J., Mechanika těles pružnost a pevnost I, skripta VUT, 1992

