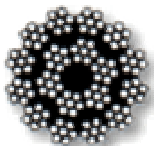
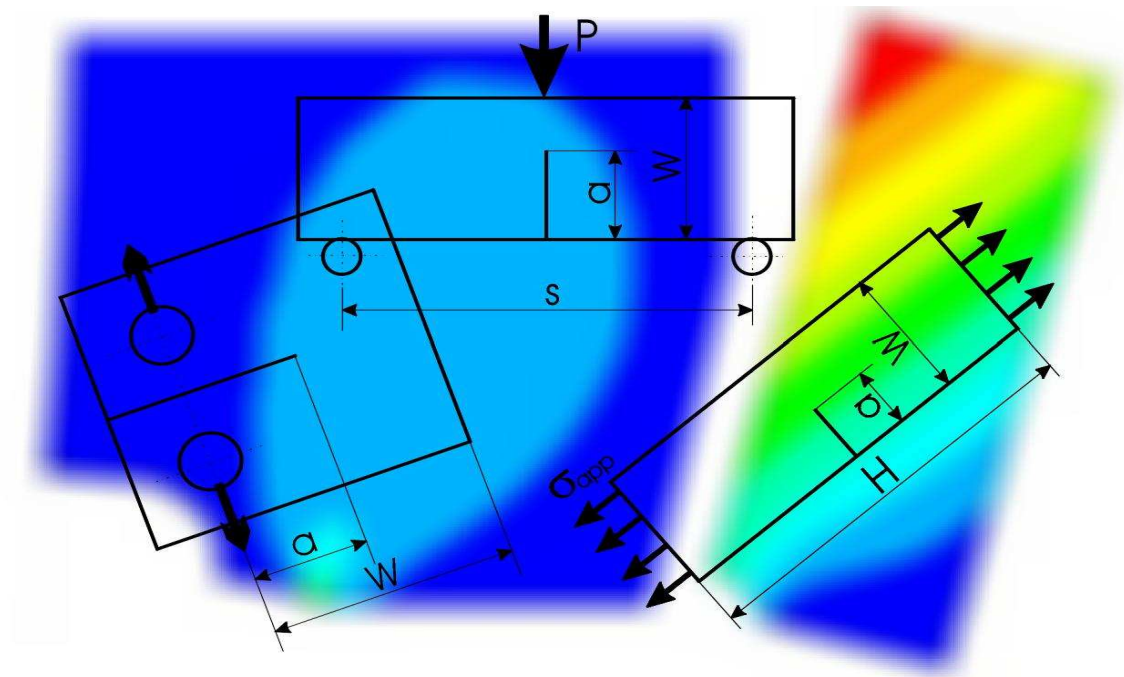
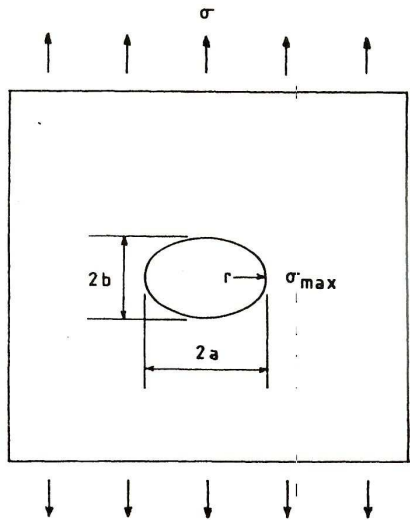


8. Základy lomové mechaniky



Koncentrace napětí

- nesignalární koncentrátor napětí

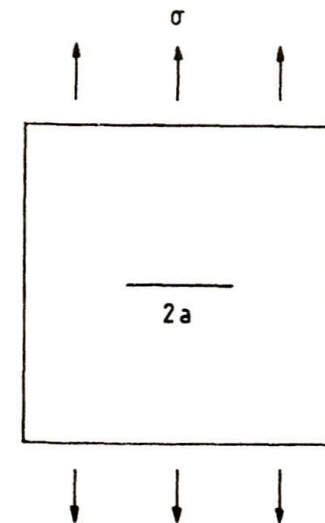


Nekonečný pás s eliptickým otvorem [Pook 2000]

$$\sigma_{\max} = \sigma \left[1 + 2(a/r)^{\frac{1}{2}} \right]$$

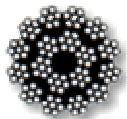
$$r \rightarrow 0 ; \sigma_{\max} \rightarrow \infty$$

- singulární koncentrátor napětí

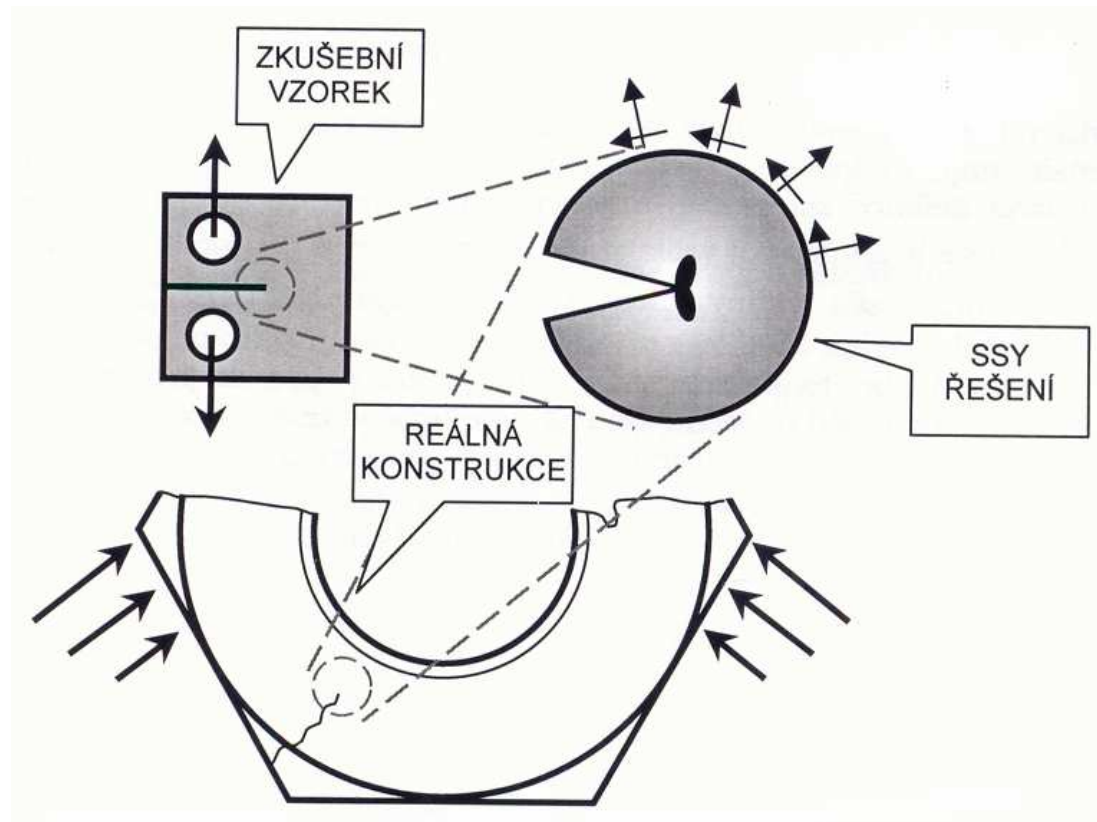


Nekonečný pás s trhlinou [Pook 2000]

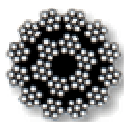
- u trhliny nelze použít klasické postupy protože na čele trhliny jdou elastické napětí do nekonečna.



Lomová mechanika



- Lomová mechanika popisuje pomocí jednoho nebo více parametrů napjatost před čelem trhliny.
- Umožňuje přenos naměřených dat ze zkušebních vzorků na reálné konstrukce.



Rozdělení lomové mechaniky

- Lineárně elastická lomová mechanika (LELM)
 - vychází z lineárně elastické mechaniky kontinua
(musí platit, že plastická zóna před čelem trhliny je malá)
 - Hnací síla trhliny (crack driving force - G)
 - Faktor intenzity napětí (stress intensity factor - K)
 - K-T koncepce
- Elasto-plastická lomová mechanika
 - používá se tam kde již nelze použít koncept (LELM)
 - Otevření v kořeni trhliny (crack tip opening displacement - CTOD)
 - J-integrál (J-integral)
 - J-Q koncepce

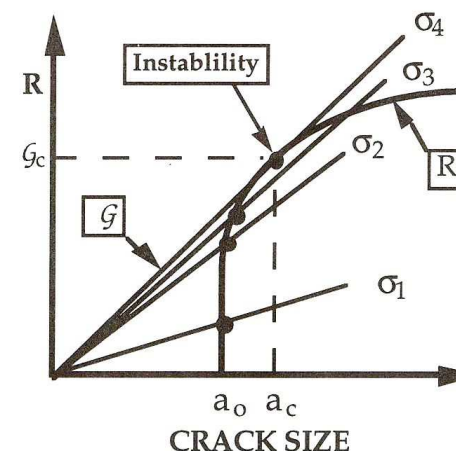


Hnací síla trhliny

- Její definice plyne z energetické bilance tělesa s trhlinou:

$$W_c = -A + U + W_\gamma$$

A – práce vnějších sil působících na těleso
 U – deformační elastická energie tělesa
 W_γ – potenciální energie trhliny
 W_c – celková energie tělesa



R-křivka [Anderson 1995]

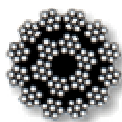
- Dosáhne-li celková volná energie tělesa svého maxima, dojde ke ztrátě stability trhliny

$$\frac{W_c}{da} = \frac{d}{da}(-A + U + W_\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{da}(A - U) = \frac{dW_\gamma}{da}$$

\swarrow \searrow
 hnací síla trhliny (G) odpor tělesa proti šíření trhliny (R)

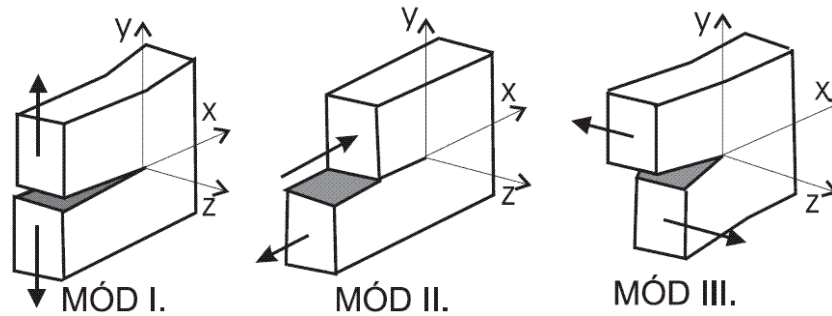
- Podmínka stability trhliny

$$G = R$$



Faktor intenzity napětí

- Předpokládáme ostrou trhlinu namáhanou třemi základními módy zatížení

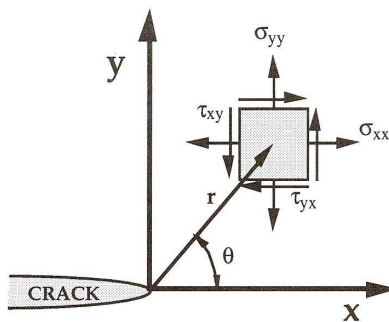


Zredukujeme-li obecnou trojrozměrnou úlohu na úlohu rovinnou v kartézských souřadnicích naznačených na obrázku, jsou potom diferenciální rovnice rovnováhy splněny, vyjádříme-li složky tenzoru napětí pomocí **Airyho funkce**:

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}$$

jsou-li splněny zároveň rovnice kompatibility, musí být funkce **F** biharmonická:

$$\frac{\delta^4 F}{\delta y^4} + 2 \frac{\delta^4 F}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 F}{\delta x^4} = \nabla^2 \nabla^2 F = 0$$



Souřadný systém v kořeni trhliny

řešení hledáme ve tvaru nekonečné řady :

$$F(r, \theta) = \sum_k A_k r^{\lambda_k} f_k(\theta)$$



Faktor intenzity napětí

Po aplikaci okrajových podmínek získáme výraz pro napětí ve tvaru nekonečné řady známé jako Williamsův rozvoj:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots$$

Vezmeme-li v úvahu pouze první, singulární člen získáme vztahy pro rozdělení napětí:

	Mode I	Mode II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
σ_{zz}	0 (Plane Stress) v $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)	0 (Plane Stress) v $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Plane Strain)
$\tau_{xz},$ τ_{yz}	0	0

[Anderson 1995]



Faktor intenzity napětí

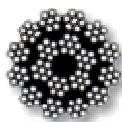
Vezmeme-li v úvahu pouze první, singulární člen získáme vztahy pro posuvy:

	Mode I	Mode II
u_x	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

[Anderson 1995]

Pro třetí mód zatěžování:

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$



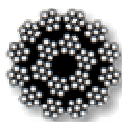
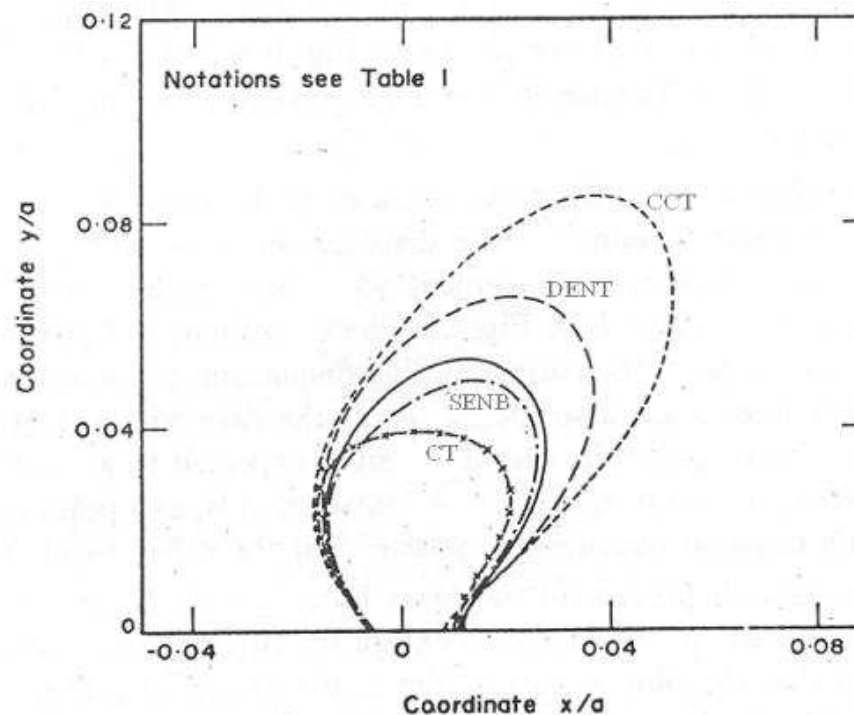
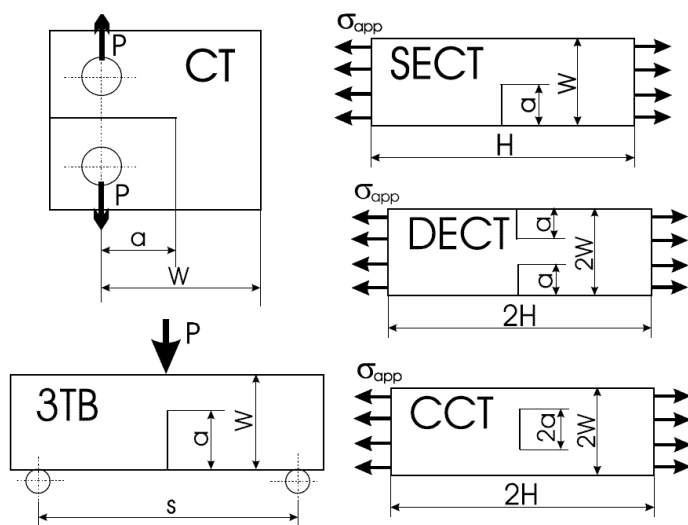
T-napětí

Williamsův rozvoj:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 \sqrt{r} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots$$

Rozdělení napětí před čelem trhliny s uvažováním T-napětí:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu T \end{bmatrix}$$

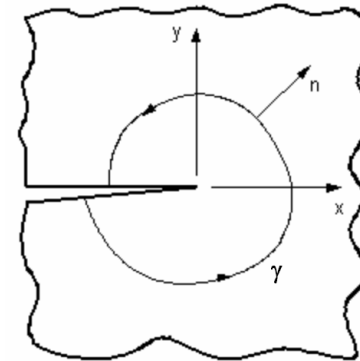


J-integrál

- J-integrál je zobecněním hnací síly trhliny a umožňuje použití i v případech plastické deformace většího rozsahu:

J-integrál je definovaný jako křivkový integrál nezávislý na integrační cestě:

$$J = \int_{\gamma} W dy - \int_{\gamma} \left(t_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) ds$$



γ - integrační cesta kolem kořene trhliny

W - hustota deformační energie

t_x, t_y - vektor síly ve směru osy x, y ($t_x = \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y, t_y = \sigma_y n_y + \sigma_{xy} n_x$)

σ_x, σ_y - složky napětí

n_x, n_y - složky jednotkového vektoru vnější normály k integrační cestě γ

u_x, u_y - složky posuvů

s – délka integrační cesty

- J-integrál je definován stejně jako hnací síla trhliny, s tím že není omezený na lineárně elastický materiál:

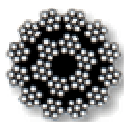
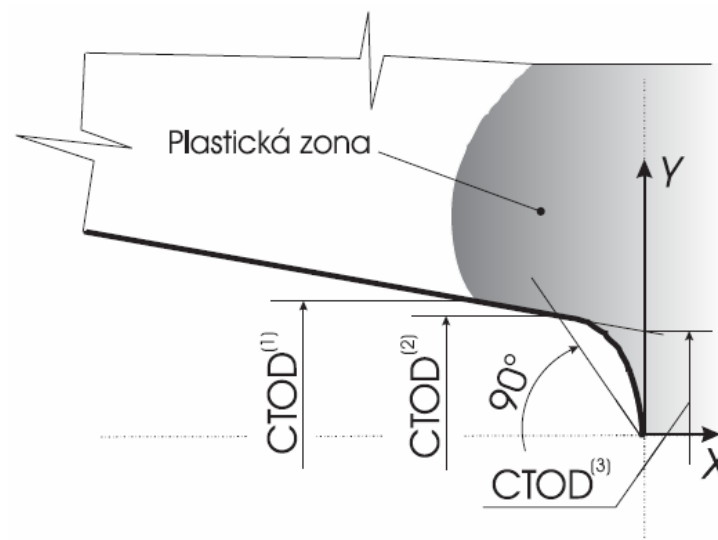
$$J = \frac{d}{da} (A - U)$$

A – práce vnějších sil působících na těleso
 U – deformační energie tělesa



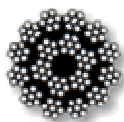
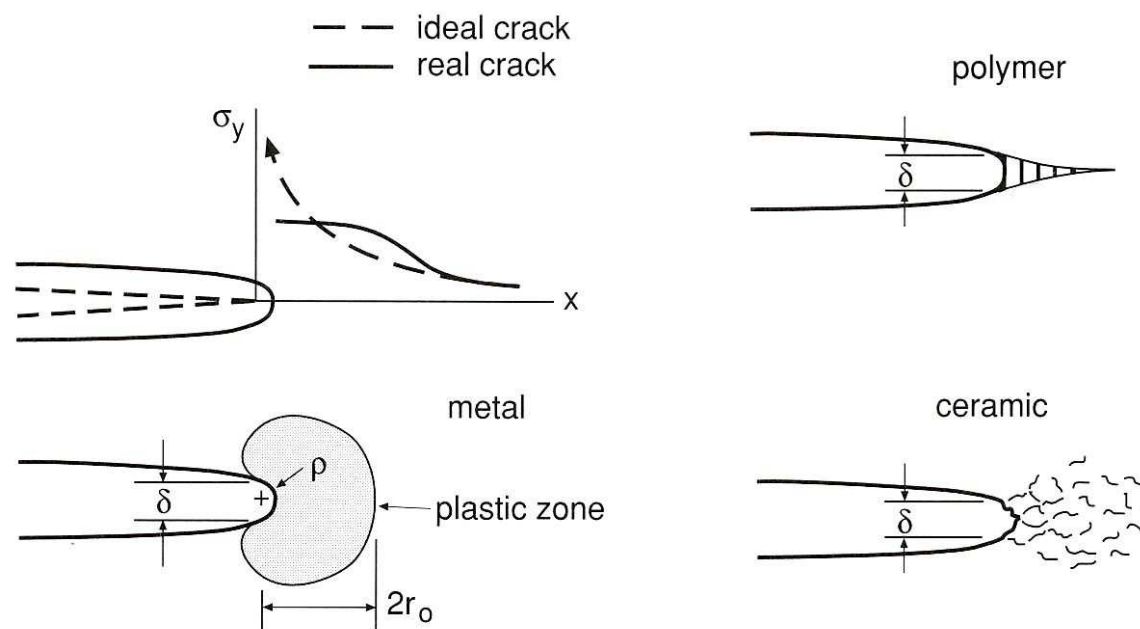
CTOD

- otevření trhliny CTOD
- $CTOD^{(1)}$ – otevření trhliny definované na hranici plastické zóny
- $CTOD^{(2)}$ – otevření trhliny definované jako průsečík líce trhliny a přímky vedené pod 45° kořene trhliny
- $CTOD^{(3)}$ – otevření trhliny určené extrapolací lineární části líce trhliny do jejího kořene



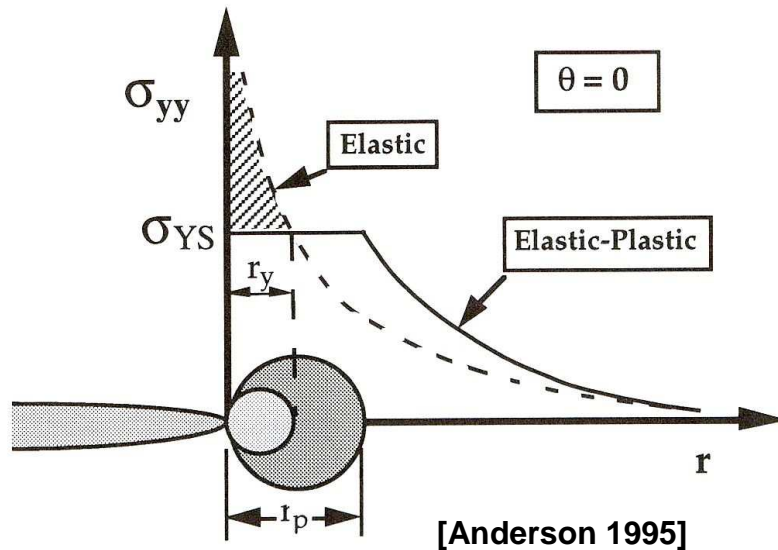
Plastická zóna

- Rozdíl mezi ideálním a skutečným kořenem trhliny v různých materiálech



Plastická zóna

- Velikost plastické zóny



- pro podmínku rovinné deformace je potom velikost plastické zóny plynoucí s elastického řešení :

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

- Prvotní odhad velikosti plastické zóny čistě s elastického řešení (lineárně elastická lomová mechanika) za podmínky rovinné napjatosti:

$$\sigma_{yy} = \sigma_0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}}$$



$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

- Tento odhad velikosti plastické zóny není úplně korektní, protože uvažuje pouze elastické rozdělení napětí před čelem trhliny. Vlivem plastifikace materiálu v oblasti kolem kořene trhliny dojde k přerozdělení napětí. Vyšrafovaná oblast v obr. představuje napjatost v ideálně elastickém materiálu, ta ale nemůže být přenášena elastickoplastickým materiálem, protože v něm nemůže napětí přesáhnout mez kluzu. Tedy plastická zóna musí vzrůst na velikost, při které je tato napjatost akumulována:

$$\sigma_0 r_p = \int_0^{r_y} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) dr$$

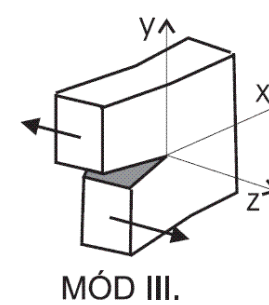
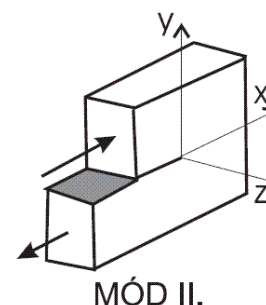
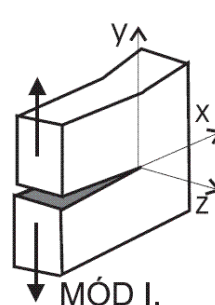
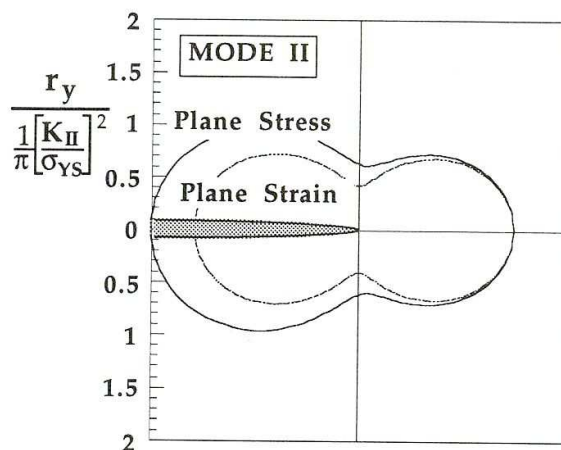
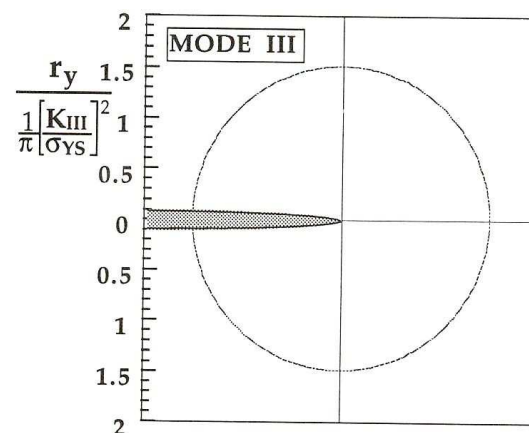
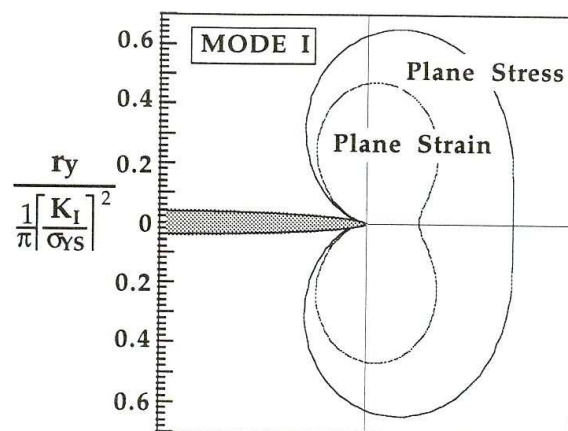


$$r_y = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_0} \right)^2$$

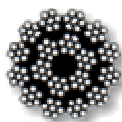


Plastická zóna

- Tvar plastické zóny v závislosti na módu zatěžování:

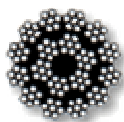
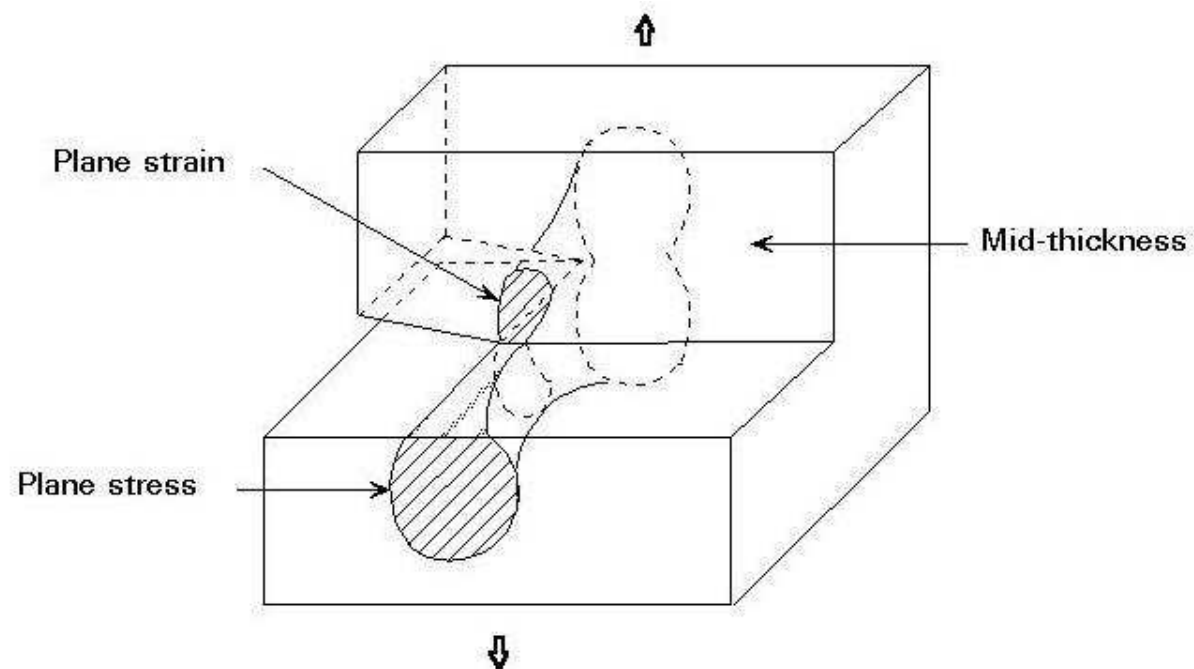


[Anderson 1995]



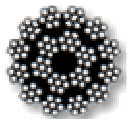
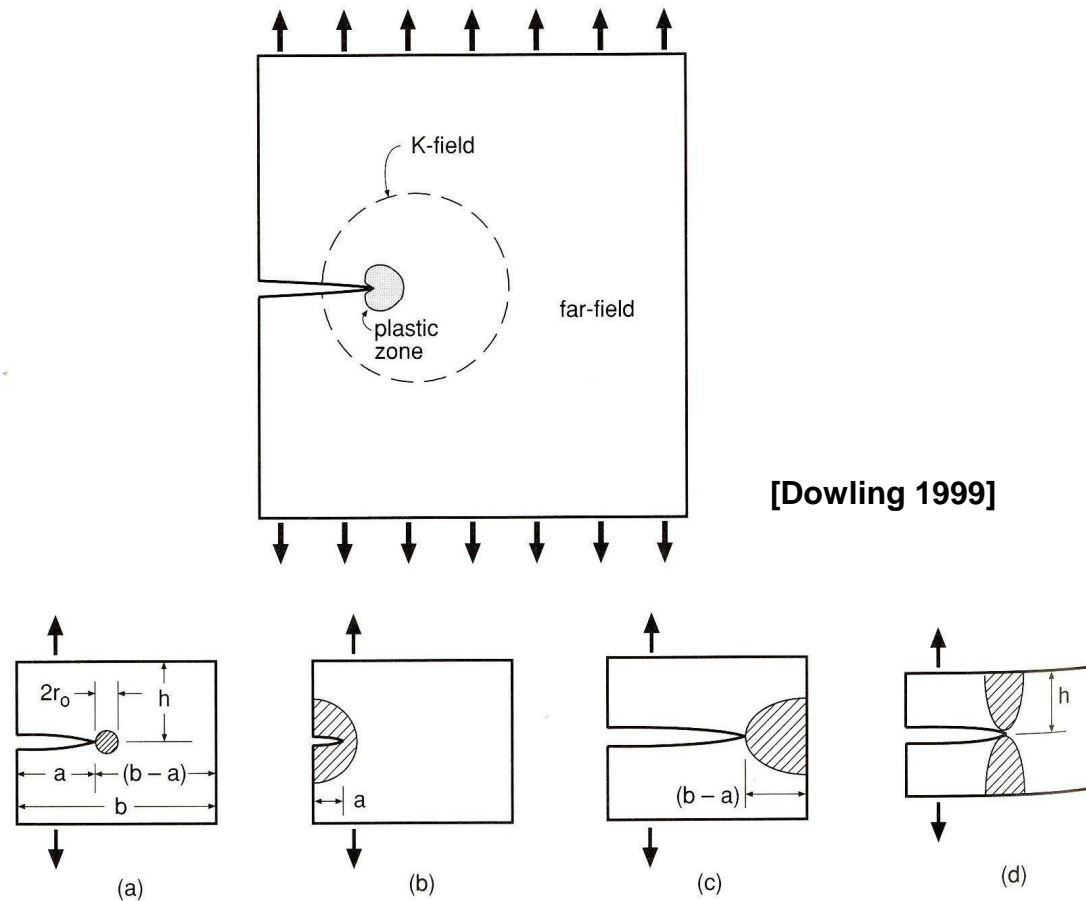
Plastická zóna

- Tvar plastické zóny v závislosti na tloušťce vzorku:



Limity LELM

- Velikost plastické zóny vzhledem k velikosti trhliny:



Použitá literatura:

- Anderson, T.,L., Fracture Mechanics - Fundamentals and Applications, CRC Press Inc., 1995
- Dowling, E. N., Mechanical behavior of materials, Simon & Schuster Comp., New Jersey, 1999
- Norton, R. L., Machine design *An integrated approach*, Pearson, New Jersey, 2006
- Kunz, J., Základy lomové mechaniky, skripta ČVUT, 1994
- Vlk, M., Mezní stavy a spolehlivost, skripta VUT, 1991
- Ondráček, E., Vrbka, J., Janíček, P., Mechanika těles pružnost a pevnost II, skripta VUT, 1991

